Departamento de Matemática

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO
Complemento teórico

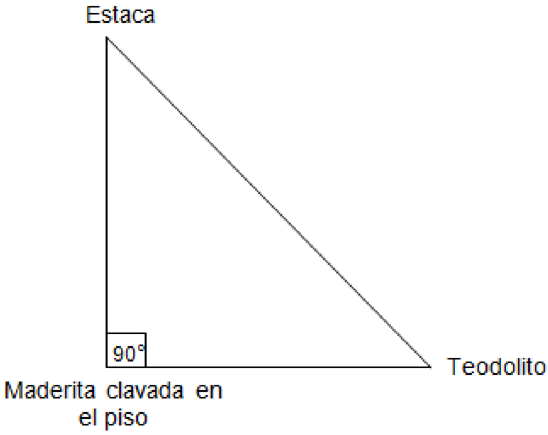
Segundo Año

Para comenzar pensemos la siguiente situación que nos servirá como puntapié para desarrollar el tema: Una de las tareas más importantes de los agrimensores consiste en determinar los límites exactos de terrenos. En el lugar toman la información que precisan y después, en sus oficinas, hacen todos los dibujos y cálculos que consideran necesarios. Las distancias que tienen que medir son muy grandes, tanto en el campo como en la ciudad, por lo cual la cinta métrica no es una herramienta eficaz. El instrumento que resulta útil para tomar longitudes muy grandes es el teodolito. Este aparato se utiliza para medir ángulos entre objetos y ángulos de elevación.

El teodolito es un instrumento utilizado tanto por los agrimensores como por los topógrafos. En la actualidad, hay artefactos más modernos que se conectan a computadoras, que realizan los cálculos trigonométricos e informan, además del ángulo, la distancia que se quiere medir. Uno de estos artefactos se llama "estación total".

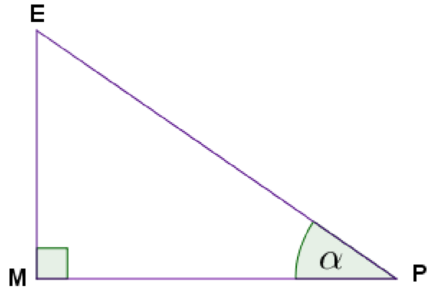
PROBLEMA 1:

Un agrimensor quiere medir el ancho de un campo. Para ello se para en un extremo del ancho, hace allí una marca con una madera y luego toma como referencia algún objeto identificable que esté en el límite opuesto del terreno, por ejemplo, una estaca del cerco. Con el teodolito, mide un ángulo recto (90º) que tenga por lado a la recta que determinan los puntos de apoyo de la estaca y la madera. Después toma otro punto de referencia que esté sobre sobre el otro lado del ángulo a 300 metros del primero. Por último mide el ángulo que tiene por vértice este último punto cuyos lados pasan por la estaca del cerco y la madera. Si el agrimensor sabe que este último ángulo tiene por amplitud 35º, ¿cómo puede hacer para calcular el ancho del terreno?



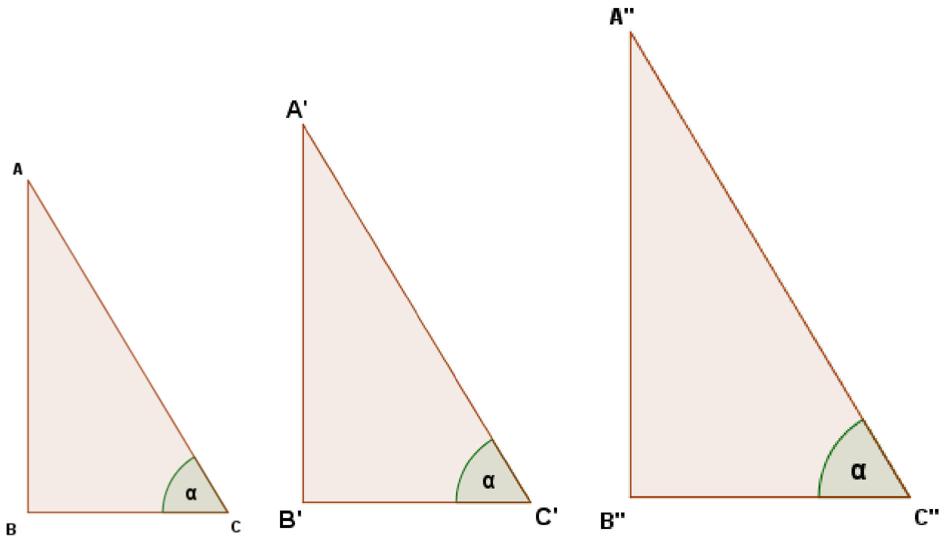
Para responder la pregunta, veamos cómo se pueden calcular longitudes a partir de las amplitudes de los ángulos medidos, y para ello debemos acudir a las ***razones trigonométricas.*** Antes de definirlas, volvamos al problema: Realicemos una figura de análisis que nos permita interpretar mejor esta situación.

Llamemos E al punto de apoyo de la estaca del cerco, M al de la madera, y P al último punto de apoyo del teodolito:



Sabemos que $\overline{MP}$ = 300m y que $\alpha = 35°$. Para hallar la medida de $\overline{EM}$ necesitamos encontrar una relación entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Consideremos diferentes triángulos rectángulos cualesquiera:



Si todos ellos tienen un ángulo agudo respectivamente congruente, entonces tienen los tres ángulos congruentes (ya que por ser rectángulo sabemos que uno de los ángulos mide 90° y el otro ángulo agudo es el complementario de α), por lo tanto, son triángulos semejantes.

Entonces, sus lados son respectivamente proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{B''C''}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{A''C''}}$$

En consecuencia, en cualquier triángulo, con ángulo α, se verifican las igualdades anteriores. Por este, se les dio un nombre particular a cada una de ellas:

Llamamos:

seno de $\hat{\alpha}$: $sen\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

coseno de $\hat{\alpha}$: $cos\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

tangente de $\hat{\alpha}$: $tg\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Como $\overline{AB}$ es el cateto opuesto al ángulo $\hat{\alpha}$, $\overline{BC}$ es el cateto adyacente y $\overline{AC}$ es su hipotenusa, en general se define:

> Sea $\hat{\alpha}$ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo,
>
> **seno de $\hat{\alpha}$** : $sen\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{hipotenusa}$
>
> **coseno de $\hat{\alpha}$:** $cos\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}{hipotenusa}$
>
> **tangente de $\hat{\alpha}$:** $tg\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}$

Volvamos al problema del agrimensor:

Como $\overline{MP}$ = 300m y $\hat{\alpha} = 35°$, respecto de $\hat{\alpha}$ tenemos al valor del cateto adyacente y queremos calcular el valor del opuesto (que sería el ancho del terreno). Como la razón trigonométrica que vincula a estos dos lados es la tangente de $\hat{\alpha}$, entonces es la que debemos utilizar para resolver el problema y así responder la pregunta:

$$tg\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{EM}}{\overline{PM}} \Longrightarrow tg\ 35° = \frac{\overline{EM}}{300m}$$

Como $tg\ 35° \cong 0{,}70002$, despejando $\overline{EM}$:

$$\overline{EM} \cong 0{,}70002\ .\ 300m$$

$$\overline{EM} \cong 210m$$

Entonces el terreno mide, aproximadamente, 210m de ancho.

Uso de la calculadora

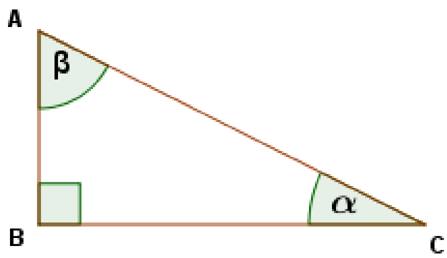
La calculadora científica nos da automáticamente los valores de las razones trigonométricas. Para ello, primero tenemos que verificar que esté tomando los valores de los ángulos en el sistema que estemos trabajando: si es en el sexagesimal, en el visor debe decir sobre el borde DEG o D (según el modelo de la calculadora), en cambio si trabajamos con el sistema circular debe decir RAD o R.

En algunas calculadoras, se debe presionar la tecla $\boxed{sin}$, $\boxed{cos}$, $\boxed{tan}$, según se desee averiguar el seno, coseno o tangente, y luego el valor del ángulo. En otras, se debe apretar primero el valor del ángulo y luego la tecla vinculada a la razón que se quiere averiguar.

Si se trata de un ángulo cuya amplitud incluye grados, minutos y segundos, muchas calculadoras tienen una tecla $\boxed{°\,'\,''}$ que nos permite introducir este tipo de amplitudes. Por ejemplo, para un ángulo de 36º 25’ 37’’, se debe introducir 36$\boxed{°\,'\,''}$ 25$\boxed{°\,'\,''}$37$\boxed{°\,'\,''}$. De esta manera, queda el visor 36,426666, que es la forma decimal de la amplitud del ángulo. Si se aprieta $\boxed{shift}$, $\boxed{2^{nd}}$ o $\boxed{INV}$ (según la calculadora) y la tecla anterior, aparecerá en el visor 36º25º37º que significa 36º 25’ 37’’

Algo más:

Dado un triángulo rectángulo, hemos definido las relaciones trigonométricas correspondientes al ángulo α. Si establecemos las relaciones que corresponden al otro ángulo agudo, es decir β:



$sen\ \hat{\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ $\qquad$ $cos\ \hat{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ $\qquad$ $tg\ \hat{\beta} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

Vemos que:

$sen\ \hat{\alpha} = \cos\hat{\beta}$ $\quad$ $cos\ \hat{\alpha} = \text{sen}\ \hat{\beta}$ $\quad$ $tg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\beta}}$

Pero como $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° \Longrightarrow \hat{\beta} = 90° - \hat{\alpha}$, por lo tanto:

$\boldsymbol{sen\ \hat{\alpha}} = cos(\mathbf{90°} - \hat{\alpha})$ $\qquad$ $\boldsymbol{cos\ \hat{\alpha}} = sen(\mathbf{90°} - \hat{\alpha})$ $\qquad$ $\boldsymbol{tg\ \hat{\alpha}} = \frac{1}{tg\ (90° - \hat{\alpha})}$

Es decir que el seno de un ángulo agudo es igual al coseno de su complementario (aquel ángulo que junto con él suma 90°). Y la tangente de un ángulo agudo es igual a la tangente inversa de su complementario

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS: CUANDO QUEREMOS HALLAR EL VALOR DEL ÁNGULO

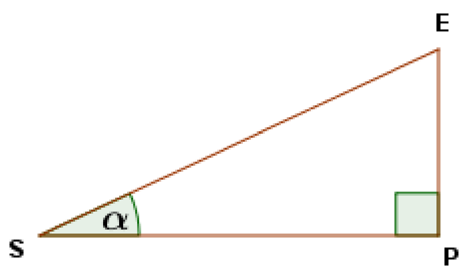
Problema 2:

Se desea construir una rampa en la entrada de un edificio para que puedan acceder por ella personas de movilidad reducida. Dicha rampa tendrá una altura de 50 cm y una longitud de 2,9 m.

a) ¿Cuál será el ángulo de elevación?

b) ¿A qué distancia de la entrada del edificio deberá comenzar la rampa?

Para interpretar mejor el problema, diseñemos una figura de análisis. Llamemos **S** al punto donde termina la rampa en el suelo, **E** al punto donde termina la rampa en la entrada del edificio, y **P** al punto de intersección de la pared del edificio con el suelo:



Tenemos que calcular el ángulo α y la longitud del segmento $\overline{SP}$. Como conocemos la longitud de la hipotenusa $\overline{SE} = 2{,}9m$ y la del cateto opuesto al ángulo α, es decir $\overline{EP} = 0{,}5m$, podemos vincular todos estos datos mediante el seno del ángulo:

$$sen\ \hat{\alpha} = \frac{0{,}5\ \cancel{m}}{2{,}9\ \cancel{m}}$$

La pregunta que surge es ¿cómo hacemos para calcular el ángulo si conocemos su seno? ¿Es posible usar la calculadora en ese caso?

Para responder todo esto definiremos las funciones inversas de cada razón trigonométrica, que son las que nos permiten hallar el ángulo conociendo el seno, coseno o tangente, estas son: arco seno, arco coseno y arco tangente respectivamente.

Volviendo a nuestro problema, para hallar el ángulo α, tenemos que aplicar el arco seno al cociente $\frac{0{,}5}{2{,}9}$, es decir: $\boldsymbol{\hat{\alpha} = arc\ sen\left(\frac{0{,}5}{2{,}9}\right)}$ (dicho cociente es aproximadamente 0,17241)

Y esta operación se realiza con la segunda función de la calculadora oprimiendo:

$\boxed{shift}$ $\boxed{sen}$ y luego el número 0,17241 o el ángulo $\frac{0{,}5}{2{,}9}$ que es la expresión exacta. En el visor de la calculadora se ve así: sen^{-1}0,17241.

Así, se obtiene: $\boldsymbol{\hat{\alpha} \cong 9{,}93° \cong 9°55'41''}$**,** que será el ángulo de elevación de la rampa. Noten que es un ángulo pequeño puesto que si tiene que subir o bajar por esa rampa una persona con movilidad reducida (ya sea con silla de ruedas, muletas, bastón, etc) no puede hacer demasiado esfuerzo.

Para responder a la pregunta b), es decir a qué distancia del edificio deberá comenzar la rampa, podemos usar el teorema de Pitágoras o alguna de las razones trigonométricas que involucre al cateto adyacente, puesto que ahora conocemos el ángulo de elevación. Pero si lo hacemos de este modo, corremos el riesgo de cometer algún error puesto que pudimos habernos equivocado en el cálculo del ángulo. Lo más aconsejable, siempre que sea posible, es utilizar los datos iniciales del problema.

Entonces aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$(SP)^2 + (EP)^2 = (SE)^2 \quad \Rightarrow \quad (SP)^2 + (0{,}5\ m)^2 = (2{,}9\ m)^2$$

$$(SP)^2 = 8{,}41m^2 - 0{,}25m^2 \quad \Rightarrow \quad (SP)^2 = 8{,}16\ m^2$$

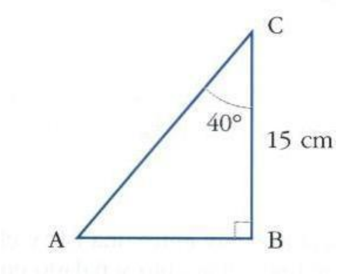
$\overline{SP} = \sqrt{8{,}16\ m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\overline{SP} \cong 2{,}86m}}$ Por lo tanto, la rampa debe comenzar aproximadamente a 2,86 metros de distancia del edificio.

Resolución de triángulos rectángulos. Ejemplos de aplicación

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar los lados y ángulos que faltan de uno del cual conocemos:

- un ángulo agudo y uno de sus lados, ó
- dos de sus lados.

Por ejemplo, resolvamos el siguiente triángulo, cuyos datos se observan en la figura:



El ángulo $\hat{C}$ mide 40°, por lo tanto el ángulo $\hat{A}$= 90°- 40= 50°. (ya que A y C son ángulos complementarios, puesto que con B que mide 90°, suman los tres 180°).

Observemos que conocemos el cateto adyacente al ángulo $\hat{C}$, que es el lado $\overline{BC}$, entonces si queremos averiguar la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ tendremos que usar el coseno de $\hat{C}$:

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \implies \cos 40° = \frac{15}{\overline{AC}} \implies \overline{AC} = \frac{15}{\cos 40°} \implies \boxed{\overline{\boldsymbol{AC}} \cong \mathbf{19{,}58}\boldsymbol{cm}}$$

Luego, para hallar $\overline{AB}$ que es el cateto opuesto, podemos usar la tangente de $\hat{C}$ si es que utilizamos nuevamente el dato inicial $\overline{BC} = 15cm$.

$$tg\ \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \implies \mathrm{tg}\, 40° = \frac{\overline{AB}}{15cm} \implies \overline{AB} = 15cm.\ tg40° \implies \boxed{\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \mathbf{12{,}59}\boldsymbol{cm}}$$

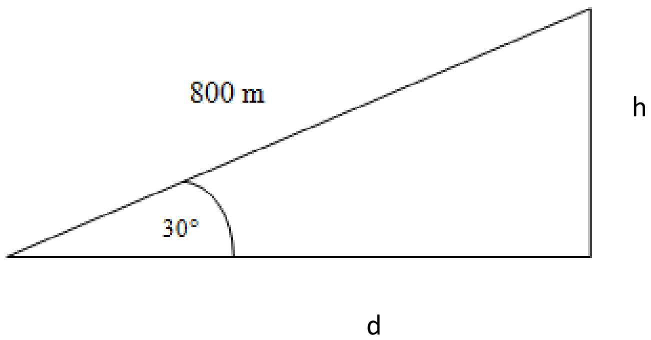
Y así hemos hallado todos los lados y ángulos desconocidos del triángulo inicial, por lo tanto, lo hemos resuelto.

Muchas situaciones problemáticas se modelizan mediante una figura de análisis que representa un triángulo rectángulo donde tenemos que hallar los lados y/o ángulos que faltan, es decir que, en ocasiones, resolver un problema implica, ni más ni menos, que resolver un triángulo rectángulo.

- **Veamos un tercer problema:**

Un avión despega formando un ángulo de 30° con el suelo. ¿Cuál será la distancia sobre la pista, cuando el avión haya recorrido 800 m de vuelo desde el punto de elevación? ¿A qué altura se encuentra el avión en dicho momento?

Para interpretar la situación podemos hacer la siguiente figura de análisis:



Lo que tenemos que hallar para responder la primer pregunta es el cateto adyacente al ángulo de 30°, y para responder la segunda, debemos hallar el cateto opuesto. Como lo que conocemos es la hipotenusa, entonces utilizaremos el coseno primero y luego el seno.

$$\cos 30° = \frac{d}{800m} \Longrightarrow d = 800m.\cos 30° \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{d \cong 692{,}82\ m}}$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{h}{800m} \Longrightarrow h = 800m.\operatorname{sen} 30° \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h \cong 400\ m}}$$

Entonces la distancia que el avión recorrió sobre la pista es 692,82 metros y la altura a la que se encuentra en ese momento es 400 metros.