PROBABILIDAD

La probabilidad es la rama de la matemática que mide la incertidumbre.

Si bien es cierto que surgió de los juegos de azar, en la actualidad tiene variadas aplicaciones. Para calcular el tamaño de una muestra en un control de calidad, para averiguar el error de estimación en una encuesta, para verificar si las variables que intervienen en una tabla de doble entrada dependen una de otra, para probar si un tratamiento médico –que fue exitoso para una muestra- se puede aplicar en el resto de los que padecen una enfermedad, debemos aplicar los conceptos y los métodos de la Teoría de probabilidades.

Como vemos, sus aplicaciones se diversifican en numerosas disciplinas científicas como física, genética, astronomía, medicina, economía, sociología, entre otras.

ALGUNAS DEFINICIONES

- **EXPERIMENTO ALEATORIO:**
  Es aquel en el que, a pesar de conocer el conjunto de los resultados posibles, no se puede predecir su verdadero resultado. Por ejemplo: “Arrojar un dado y ver qué número sale”; “Elegir un alumno del curso y ver qué edad tiene”; etc.

- **ESPACIO MUESTRAL:**
  Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- **SUCESO:**
  Es un subconjunto del espacio muestral.

  Ejemplo:

  - Experimento aleatorio: “Arrojar un dado y observar qué número sale”
  - Espacio muestral: E={1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Un suceso asociado: A: “Sale un número par” , A={2, 4, 6}
  - Otro suceso asociado: B: “Sale un número múltiplo de 3”, B={3; 6}

- **ESPACIO EQUIPROBABLE:**
  Un espacio es equiprobable si todos sus elementos tienen la misma posibilidad de ocurrir.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Siempre que el espacio muestral sea un conjunto finito y equiprobable, se calcula la probabilidad de un suceso A mediante la **Fórmula de Laplace:**

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{cantidad\ de\ casos\ favorables}{cantidad\ de\ casos\ posibles}}}$$

Donde P(A) se lee: “Probabilidad de que ocurra el suceso A” o simplemente “Probabilidad de A”.

Ejemplo 1:

- Experimento Aleatorio: “Arrojar un dado y ver qué número sale”
- Espacio muestral E={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Suceso A: “Sale un número par”, A= {2, 4, 6}.
- Suceso B: “Sale el nº 5”, B={5}
- Suceso C: “Sale un nº mayor o igual que 5”, C={5, 6}

La probabilidad de que al arrojar un dado el número obtenido sea par es: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Es decir hay un 50% de probabilidad de que ocurra el suceso A. (*Observar que 3 es el cardinal del conjunto A, es decir la cantidad de casos favorables = cantidad de caras del dado que tienen un número par. Y 6 es el cardinal del espacio muestral, es decir la cantidad de casos posibles = cantidad de caras de un dado*)

De la misma manera podemos calcular la probabilidad de que al arrojar un dado el número obtenido sea 5: $P(A) = \frac{1}{6}$

Y la probabilidad de que al arrojar un dado, el número obtenido sea mayor o igual que 5 es: $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 2:

- Experimento Aleatorio: “Se elige al azar un alumno de un curso de 10 personas y se le pregunta su edad”
- Espacio muestral E={16, 18, 23, 21, 17, 16, 25, 22, 16, 24}
- Suceso A: “El alumno elegido tiene 21 años o más”
- Suceso B: “El alumno elegido puede votar”
- Suceso C: “El alumno elegido tiene 16 años”

La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga 21 años o más es: $P(A) = \frac{5}{10}$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar pueda votar es: $P(B) = \frac{6}{10}$ (Dado que hay 6 alumnos que tienen 18 años o más)

La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga 16 años es: $P(C) = \frac{3}{10}$

- **<u>SUCESO COMPLEMENTARIO (o complemento de un suceso)</u>**

El suceso $\bar{A}$**,** que se llama *complemento del suceso A*, es el suceso que ocurre cuando no ocurre el suceso A.

Ejemplo (continuación del ejemplo 2 anterior):

Suceso $\bar{A}$: “El alumno elegido es menor de 21 años” $P(\bar{A}) = \frac{5}{10}$

Suceso $\bar{B}$: “El alumno elegido no puede votar” $P(\bar{B}) = \frac{4}{10}$

Suceso $\bar{C}$: “El alumno elegido no tiene 16 años” $P(\bar{c}) = \frac{7}{10}$

Se verifica que: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ALGUNAS CONSIDERACIONES:

Para todo espacio muestral E se verifica lo siguiente:

1) P(E)=1
2) 0 ≤ P(A) ≤1 (siendo A suceso del espacio muestral E)

Si P(A)=0 se dice que el suceso A es ***imposible***.

Si P(A)=1 se dice que el suceso A es ***seguro***.

NO SIEMPRE ES SENCILLO CONTAR LA CANTIDAD DE CASOS FAVORABLES Y POSIBLES AL MOMENTO DE CALCULAR UNA PROBABILIDAD, PERO PARA ELLO CONTAMOS CON OTRA RAMA DE LA MATEMÁTICA: ***LA COMBINATORIA.***

COMBINATORIA

Es la rama de la matemática que estudia técnicas que permiten contar cuántos elementos tiene un conjunto con ciertas características.

- **PERMUTACIÓN:**

Llamamos ***permutación de n elementos distintos***, $\mathbf{P_n}$, a cada forma diferente de ordenarlos. La cantidad de permutaciones se calcula mediante la fórmula:

$$\boxed{P_n=n!}$$

Donde n! (se lee "factorial de n") se calcula de la siguiente manera: n!=n.(n-1).(n-2). … . 1. Es decir se multiplica n por todos los números naturales menores que él, por ejemplo: 4!=4.3.2.1=24.

Las permutaciones de n elementos distintos se calculan utilizando el factorial de n, dado que dicha multiplicación está indicando que para el primer lugar del ordenamiento se puede elegir cualquier de los n elementos, pero luego para el segundo sólo tenemos n-1 posibilidades de elegir un elemento, y luego para el tercer lugar se tiene n-2 posibilidades, y así sucesivamente hasta que en el último lugar tenemos una única opción.

Ejemplo 1: Supongamos que queremos saber de cuántas maneras podemos apilar tres banquetas de distintos colores (rojo, azul y verde), podemos hacer un esquema para contar todas las posibilidades:

$$\begin{array}{lll}
\text{1er banqueta} & \text{2da banqueta} & \text{3er banqueta} \\
\text{Roja} & \begin{cases}\text{Azul} \\ \text{Verde}\end{cases} & \begin{array}{l}\to \text{Verde} \\ \to \text{Azul}\end{array} \\
\text{Azul} & \begin{cases}\text{Roja} \\ \text{Verde}\end{cases} & \begin{array}{l}\to \text{Verde} \\ \to \text{Roja}\end{array} \\
\text{Verde} & \begin{cases}\text{Roja} \\ \text{Azul}\end{cases} & \begin{array}{l}\to \text{Azul} \\ \to \text{Roja}\end{array}
\end{array}$$

Como se observa en el esquema hay 3 posibilidades de elegir la primer banqueta, pero luego de hacer la elección sólo podemos elegir entre las otras 2 que quedan, y por último sólo podremos seleccionar la restante. Por lo tanto, para contar todas las combinaciones hay que pensar en todos los ordenamientos posibles y siguiendo el esquema anterior esto nos lleva a hacer el siguiente cálculo: 3.2.1, es decir 3!, que es la fórmula para calcular P_3, o sea las permutaciones de 3 elementos distintos.

Ejemplo 2: *Si en un banco de una plaza se sientan uno al lado del otro Nicolás, Matías, Bárbara, Sofía y Agustín, ¿Cuál es la probabilidad de que Matías y Bárbara estén sentados juntos en los dos primeros lugares de la izquierda?*

Llamando A al suceso: "Matías y Bárbara están sentados juntos en los dos primeros lugares de la izquierda", para calcular P(A) debemos contar la cantidad de casos posibles y la cantidad de casos favorables. La primera cantidad es el número de ordenamientos posibles de las cinco personas en el banco, es decir las permutaciones de 5 elementos, P_5 = 5!=120. La cantidad de casos favorables serán todos aquellos en los cuáles estén Matías y Bárbara en los dos primeros lugares de la izquierda. Para contar dichos casos hay que pensar que, si bien esas dos personas están fijas en dos lugares, las otras tres personas podrían ocupar cualquiera de los restantes lugares, por lo tanto ellas tres permutan. Por cada permutación de esas tres personas (Nicolás, Sofía y Agustín), hay dos posibilidades que ocurra el suceso A (dado que podría estar primero Bárbara y luego Matías o al revés), entonces la cantidad de casos favorables se calcula así: $2.P_3 = 2.\ 3! = 12$.

En consecuencia: $P(A) = \frac{12}{120} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(A) = \frac{1}{10}}$

- **VARIACIÓN (SIN REPETICIÓN)**

Llamamos ***variación sin repetición de n elementos tomados de a k***, $V_{n;k}$, con k≤n, a cada forma de ordenar n elementos en k lugares, sin que un mismo elemento pueda ubicarse en más de un lugar (es decir, no se repiten).

La cantidad de esas variaciones se calcula así: $V_{n;k} = \underbrace{n}_{1er\ \text{lugar}} .\underbrace{(n-1)}_{2^{\circ}\ \text{lugar}}.\underbrace{(n-2)}_{3er\ \text{lugar}}.\ \ldots\ .\underbrace{(n-(k-1))}_{\text{k-ésimo lugar}}$

O se puede probar que equivale a: $\boxed{V_{n;k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Ejemplo 1: *Considerando los dígitos del 1 al 7:*

a) *¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar?*
b) *¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar, éste sea par?*

a) $V_{n;k}$= 7.(7-1).(7-2). (7- (4-1)) = 7.6.5.4 = 840

(Ya que para elegir el dígito del primer lugar tenemos 7 opciones, pero luego para el segundo lugar tenemos una opción menos, es decir 6, y así sucesivamente).

O utilizando la otra fórmula: $V_{7;4}=\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6}$. Por lo tanto: $V_{n;k}$=840.

Es decir se pueden formar 840 números de cuatro cifras distintas con los dígitos del 1 al 7.

b) Para que el número elegido sea par, debe terminar en 2, 4 o 6. Por lo tanto si fijamos cualquiera de esos números en el último lugar, los tres restantes pueden ser cualquiera de los otros 6 dígitos que quedan sin utilizar y a su vez sabemos que teniendo tres dígitos cualesquiera, aún cuando estén los mismos en otro orden genera un número distinto, por lo tanto todos los caso favorables son: $3.V_{6;3} = 3.\frac{6!}{3!} = 3.120 = 360$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_}_{V_{6;3}}\ 2$$

$$\_\ \_\ \_\ 4$$

$$\_\ \_\ \_\ 6$$

Por lo tanto la probabilidad de que un número elegido al azar sea par es: $\frac{360}{840} = \mathbf{\frac{3}{7}}$

Ejemplo 2: *¿De cuántas formas se pueden distribuir 5 premios entre 12 personas?*

$$V_{12;\,5} = \frac{12!}{7!} = 95040$$

- **<u>VARIACIÓN (CON REPETICIÓN)</u>**

Llamamos ***variación con repetición de n elementos tomados de a k***, $V'_{n;k}$, a cada forma de ordenar n elementos en k lugares, en los cuáles cada elemento puede estar en más de un lugar (es decir, pueden repetirse).

La cantidad de esas variaciones se calcula así:

$$\boxed{\mathbf{V'_{n;k} = n^k}}$$

Dado que en los k lugares puede estar cualquiera de los n elementos, es decir que multiplicaremos k veces el número n.

Ejemplo: ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los números del 1 al 7?

$V'_{n;k} = 7^4 = 2401$. Por lo tanto existen 2401 números que pueden formarse con lo dígitos del 1 al 7. (*Observar que son muchos más que los números de 4 cifras distintas que pueden formarse con dichos dígitos, dado que en este caso se aceptan números como el 2235, o el 1111, o 2532, etc*).

- **<u>COMBINACIÓN</u>**

Llamamos combinación de n elementos tomados de a k, con n≥k, a cada forma de seleccionar k elementos distintos de entre n elementos distintos, sin importar el orden en el que aquellos se seleccionan. (Es decir, un grupo es diferente de otro si varía algún elemento, no el orden de los mismos)

La cantidad de combinaciones se calcula así: $C_{n;k} = \frac{V_{n;k}}{P_k}$

Pues $C_{n;k}$ representa todos los grupos no ordenados de k elementos, $V_{n;k}$ es la cantidad de grupos ordenados de k elementos y P_k es la cantidad de ordenamientos de los k elementos.

Aplicando las fórmulas vistas en la expresión anterior, obtenemos que $\boxed{C_{n;k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ que se lo llama número combinatorio y se lo expresa también así: $C_{n;k} = \binom{n}{k}$

Ejemplo: *En el coro de una escuela, participan 18 mujeres y 9 varones. El director de dicho coro debe elegir 4 voces masculinas y 5 voces femeninas para interpretar una canción.*

a) ¿De cuántas maneras puede seleccionar el director las voces masculinas?
b) ¿Cuántas elecciones de voces femeninas puede realizar el director?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que Camila y Melina sean elegidas?

RESOLUCIÓN:

a) $C_{9;4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$. El director puede elegir las voces masculinas de 126 maneras.

b) $C_{18;5} = \binom{18}{5} = \frac{18!}{5!(18-5)!} = 8568$. El director puede elegir las voces femeninas de 8568 maneras.

c) De las 8568 maneras posibles que tiene el director para elegir las 5 voces femeninas, hay que contar aquellos en los cuáles estén Camila y Melina juntas. Para ello, podemos pensar que 2 elementos son fijos, y los otros tres pueden ser cualquiera de los 16 restantes (dado que en total son 18 mujeres). Como no interesa el orden que las elija, sino simplemente que estén dentro del grupo seleccionado, entonces los casos favorables serán las combinaciones de 16 elementos tomados de a 3, es decir : $C_{16;3} = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560$

Entonces la probabilidad de que Camila y Melina sean elegidas es: $\frac{560}{8568} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{153}}$ que es aproximadamente 0,065 o un 6,5%.

SUCESOS EXCLUYENTES

- Dos sucesos A y B son excluyentes (o mutuamente excluyentes) si no pueden ocurrir simultáneamente. En dicho caso se cumple que:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B)} \quad y \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = 0}$$

- En caso contrario, es decir si A y B son <u>no</u> excluyentes y por lo tanto $P(A \cap B) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

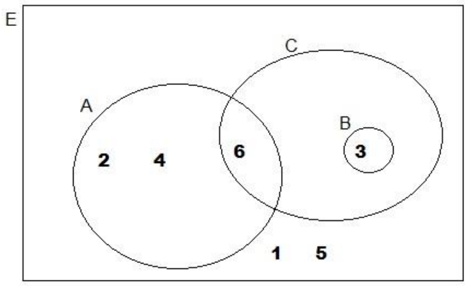
<u>Ejemplo:</u> Arrojo un dado al azar, **a)** ¿cuál es la probabilidad de que salga un nº par o el nº 3? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que salga un nº par o un múltiplo de 3?

Definamos los sucesos y sus probabilidades:

A= "Sale nº par" $\Longrightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B= "Sale el nº3" $\Longrightarrow P(B) = \frac{1}{6}$

C= "Sale un múltiplo de 3" $\Longrightarrow P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



P(A∩B)=0

P(A∩C)=1/6

P(B∩C)=1/6

a) P(A U B)= P(A) + P(B)
P(A U B)= $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{6}$ = $\boxed{\frac{2}{3}}$

b) P(A U C)= P(A) + P(C) – P(A∩C)
P(A U C)= $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{6}$ = $\frac{2}{3}$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Cuando calculamos probabilidades considerando sólo una parte del espacio muestral, decimos que estamos calculando una ***probabilidad condicional.***
- La probabilidad condicional de un suceso A sabiendo que ha ocurrido otro suceso B, se simboliza P(A/B) y se calcula: $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ con P(B)≠0

  A partir de esta fórmula se puede deducir que P(A∩B)=P(A/B). P(B)

Ejemplo: Si el 60% de las personas de un grupo son mujeres y, entre ellas el 20% juega al vóley, ¿cuál es la probabilidad de que, si se elige una persona al azar, juegue vóley y sea mujer?

$$P(V \cap M) = P(V/M) \cdot P(M)$$

$$0{,}20 \quad . \quad 0{,}60 = \boxed{\mathbf{0{,}12}}$$

- Dos sucesos son ***independientes*** cuando la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de la ocurrencia del otro. Es decir, dos sucesos A y B son independientes cuando se verifica que **P(A/B)=P(A)** y por lo tanto: **P(A∩B)= P(A).P(B)**

Ejemplo: Supongamos que en una caja tenemos 3 bolas azules y 2 blancas. Extraigo una y resulta ser de color azul. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola blanca en una segunda extracción? **b)** ¿Cuál es la probabilidad si repongo la bola en la caja?

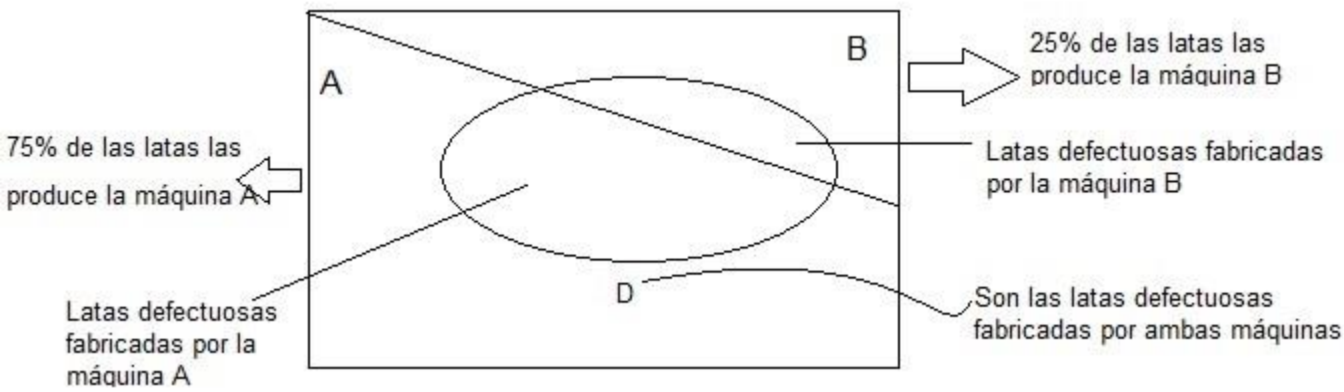
P(A)= 3/5 P(B)= 2/5 **a)** P(B/A)=2/4= ½ **b)** P(B/A)= 2/5

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Si C es un suceso cualquiera correspondiente a un espacio muestral E y E=A U B, donde los sucesos A y B son excluyentes, se verifica que: $\boldsymbol{P(C) = \underbrace{P(C/A).P(A)}_{P(C\cap A)} + \underbrace{P(C/B).P(B)}_{P(C\cap B)}}$

Ejemplo: En una empresa hay 2 máquinas, A y B, que fabrican latas. La máquina A, que produce el 75% de las latas, realiza un 10% de ellas de manera defectuosa y, la máquina B realiza un 5% de latas defectuosas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una lata al azar ésta sea defectuosa?
b) ¿Cuántas latas deben producirse para obtener 7300 en buen estado?



Sucesos:
A: "Las latas son fabricadas por la máquina A"
B: "Las latas son fabricadas por la máquina B"
D: "Las latas son defectuosas"

a) $P(D)= P(D\cap A) + P(D\cap B)$
$P(D)= P(D/A).\ P(A) + P(D/B).\ P(B)$
$P(D)= 0{,}10.\ 0{,}75 + 0{,}05.\ 0{,}25$
$P(D)= 0{,}075 + 0{,}0125$
P(D)= 0,0875
Es decir, el 8,75% de las latas producidas por la empresa, son defectuosas.

b) $P(\overline{D}) = 1 - P(D)$
$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}0875 = 0{,}9125$

Utilizando la definición de la Laplace:
$\frac{7300}{x} = 0{,}9125 \Rightarrow x = \frac{7300}{0{,}9125}$

X= 8000 latas.

TEOREMA DE BAYES

Si los sucesos A y B son complementarios (excluyentes) y el suceso D tiene probabilidad positiva (es decir, P(D)>0), se verifica que: $\boldsymbol{P(A/D)} = \frac{\boldsymbol{P(A\cap D)}}{\boldsymbol{P(D)}} = \frac{\overbrace{\boldsymbol{P(D/A).P(A)}}^{\boldsymbol{P(D\cap A)}}}{\boldsymbol{P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)}}$

Ejemplo: En una fábrica de golosinas se producen cajas de caramelos masticables y cajas de caramelos duros. Las cajas de caramelos masticables contienen un 50% de caramelos de frutilla y un 50% de caramelos de naranja. La caja de caramelos duros están compuestos por un 65% de caramelos de frutilla y un 35% de caramelos de naranja.

Un empleado coloca en un cajón el contenido de algunas cajas de caramelos masticables y duros. En el cajón, el 45% de los caramelos son masticables y el resto son duros.

¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar del cajón un caramelo de naranja éste sea masticable?

Sucesos:

M: “El caramelo elegido es masticable”

D: “El caramelo elegido es duro”

F: “El caramelo elegido es de frutilla”

N: “El caramelo elegido es de naranja”

	F	N	
M	0,225	0,225	0,45
D	0,3575	0,1925	0,55
	0,5825	0,4175	1

Esta tabla da la probabilidad de las intersecciones de los sucesos. Se completa en base a algunos de los datos del enunciado y otros “por descarte” dado que los sucesos F y N, al igual que los sucesos M y D, son excluyentes. (Trate de llegar usted mismo a esos resultados)

Aplicando el teorema de Bayes dado que los sucesos M y D son complementarios:

$$P(M/N) = \frac{P(N/M).P(M)}{P(N/M).P(M) + P(N/D).P(D)}$$

$$P(M/N) = \frac{0{,}5.\ \ 0{,}45}{0{,}5.0{,}45 + 0{,}35.0{,}55} = \frac{0{,}225}{0{,}4175}$$

$$\boldsymbol{P(M/N) = 0{,}5385}$$

Es decir, la probabilidad de que al elegir al azar un caramelo de naranja del cajón, éste sea masticable es del 53,85%.

Otras preguntas (intente resolverlas ud. solo y luego verifique con las respuestas)

1) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar del cajón un caramelo sea duro y de frutilla?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar del cajón un caramelo de frutilla, éste sea duro?

Respuestas: 1) 0,3575 2) 0,6137