Unidad N°: 1 "Metrología"

“Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber”
(ALBERT EINSTEIN)

¿Qué es la metrología?

La metrología es la ciencia de la medida. Tiene por objetivo el estudio de los sistemas de medida en cualquier campo de la ciencia. También tiene como objetivo indirecto que se cumpla con la calidad.

La metrología tiene dos características muy importantes, el resultado de la medición y la incertidumbre de medida.

Los físicos y las industrias utilizan una gran variedad de instrumentos para llevar a cabo sus mediciones. Desde objetos sencillos como reglas y cronómetros, hasta potentes microscopios, medidores de láser e incluso avanzadas computadoras extremadamente precisas. Por otra parte, la metrología es parte fundamental de lo que en los países industrializados se conoce como *Infraestructura Nacional de la Calidad*, compuesta además por las actividades de: **normalización, ensayos, certificación y acreditación**, que a su vez son dependientes de las actividades metrológicas que aseguran la exactitud de las mediciones que se efectúan en los ensayos, cuyos resultados son la evidencia para las certificaciones. La metrología permite asegurar la comparabilidad internacional de las mediciones y por tanto la intercambiabilidad de los productos a escala internacional.

A continuación se enumeran algunas definiciones que necesitaremos estudiar para entender el proceso de la medición.

- **Magnitud física:** es una propiedad o cualidad de un objeto o sistema físico a la que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medición cuantitativa. Seguramente entre las primeras magnitudes definidas resultan la longitud de un segmento y la superficie de un cuadrado. Las magnitudes físicas se cuantifican usando un patrón que tenga bien definida esa magnitud, y tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón. Por ejemplo, se considera que la longitud del metro patrón es 1. Ejemplos de magnitudes físicas: velocidad, peso, longitud, etc.
  El valor numérico de la magnitud física se informa de la siguiente manera:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)[unidades]$$

  El valor de x se toma como el valor más representativo de la medición ($\bar{X}$) junto con el error de este valor (ΔX). Es decir, se informa el intervalo dado por:

$$[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$$

  Donde se encuentra el valor más representativo de x.
  Si bien existen casos donde se acepta que el error se exprese con más de una cifra significativa, a lo largo de este apunte intentaremos usar una sola cifra significativa para informar el error de la medición y esto determinará con cuantas cifras decimales se expresará el valor de $\bar{X}$.

Ejemplo

Dada una medición de masa, se obtiene que el valor más representativo es $\bar{x} = 2{,}2421g$ y $\Delta x = 0{,}1g$, entonces el valor de la masa se expresa como $x = (2{,}2 \pm 0{,}1)g$.

- **Cantidad:** Es el valor de una magnitud. Ej.: 100, 200, 54, 1000, 458, etc.
- **Medir:** es comparar una magnitud respecto de otra considerada unidad patrón. Ej.: se mide cierta longitud de un objeto con un metro, y verificamos que este entra 3 veces en esta longitud, significa que el objeto tiene tres metros de longitud. En este ejemplo *la magnitud física es la longitud*, *la cantidad es 3* y *el metro es la unidad patrón*. **Medir** requiere de un entrenamiento, de cierta práctica, de conocer las magnitudes a medir y saber elegir y tener cierto manejo de los aparatos con los que se realizarán las mediciones.
- **Unidad:** tiene existencia física real y es el patrón de referencia.

- **Nombre de la unidad:** es la identificación del patrón. Ej.: longitud $\rightarrow$ Metro.

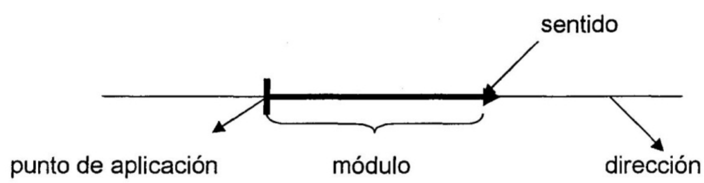
Las magnitudes se dividen en dos grandes grupos:

1) **Magnituds escalares:** son aquellas que quedan perfectamente definidas por un número (la cantidad) y su correspondiente unidad (el nombre de la unidad). Ej: 25 segundos (tiempo), 3 metros (longitud), $\frac{3}{2}\pi$ radianes (abertura de un ángulo), 3 kilogramos (masa).

   Las magnitudes escalares pueden representarse graficamente por medio de una escala. Otros ejemplos de estas magnitudes son: masa, el volumen, la longitud, la energía y el tiempo.

2) **Magnitudes vectoriales:** son las magnitudes que quedan caracterizadas por una cantidad (intensidad o módulo), una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Es el caso de la velocidad, la fuerza, la aceleración, el campo eléctrico, la intensidad luminosa, etc.

   Ej: $30\frac{km}{h}$ (velocidad); es necesario indicar sobre quien esta aplicada (el móvil), en que dirección (norte-sur), su sentido (hacia el norte) y su intensidad o módulo (30). Toda magnitud vectorial se representa por medio de un **vector**. Un vector es un segmento orientado en el cual aparecen todos los elementos que definen a una magnitud vectorial: punto de aplicación, dirección, sentido y módulo, tal como se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo de aplicación de magnitudes vectoriales

Indicar cada una de las propiedades de la magnitud vectorial velocidad en la siguiente situación física:

Un automóvil que va a una velocidad de 80 km/h transita por la ruta 2 con destino a Mar del Plata.

Punto de aplicación: el automóvil.
Dirección: Ruta 2.
Sentido: Mar del Plata.
Módulo o intensidad: 80.

Relaciones de proporcionalidad

Una de las relaciones más simples entre la medida de las cantidades de dos magnitudes, es la **relación de proporcionalidad directa**.

Definiciones:

Se llama **razón** entre dos números a y b (siendo $b \neq 0$), al cociente de la división de dichos números.

Se llama **proporción** a la **igualdad** entre dos razones.

Supongamos analizar la relación que existe entre el **peso** y el **volumen** de trozos de un mismo material. Para ello debemos establecer el peso y el volumen de cada trozo pudiendo luego con los datos obtenidos construir un cuadro de valores.

Cuadro de valores obtenidos:

Peso	Volumen
50	4
100	8
150	12

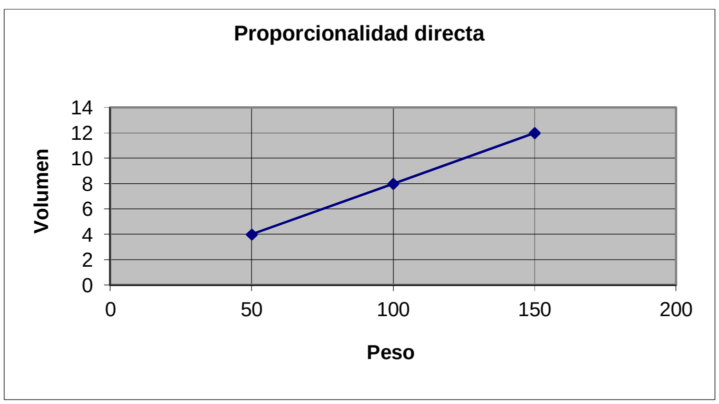
En el cuadro se ve que a cada valor de peso le corresponde un único valor de volumen. Por otro lado podemos observar que al aumentar una de las magnitudes en una cierta proporción, la otra magnitud también aumenta en la misma proporción.

Por lo tanto al efectuar el cociente entre los valores de las dos magnitudes obtendremos un valor constante, denominado **constante de proporcionalidad directa**.

$$\boxed{\frac{P}{V} = K}$$

Los datos del cuadro de valores pueden ser representados gráficamente sobre un par de ejes de coordenadas cartesianas. Para ello se asigna una cierta escala para cada valor de cada magnitud y se representa con ellos gráficamente cada magnitud sobre un eje, obteniéndose de esa manera una serie de puntos sobre cada eje. Luego se ubican los pares ordenados y uniendo los mismos se obtiene la representación gráfica de dicha función.

La representación gráfica de una función de proporcionalidad directa da siempre por resultado una **línea recta**.



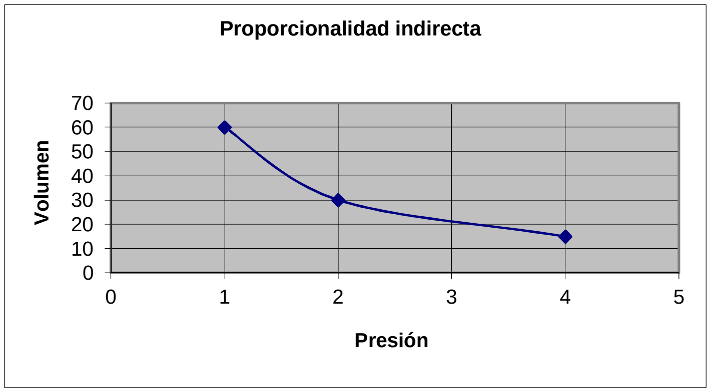
Supongamos ahora analizar la relación que existe entre la **presión** y el **volumen** de un gas que se comprime. Como en el caso anterior realizamos un cuadro de valores:

Presión	Volumen
1	60
2	30
4	15

En el cuadro se ve que a cada valor de presión le corresponde un único valor de volumen. Por otro lado se observa que al aumentar una de las magnitudes en una cierta proporción, la otra magnitud disminuye en la misma proporción. Por lo tanto al efectuar el producto entre los valores de las dos magnitudes obtendremos un valor constante, denominado **constante de proporcionalidad inversa**.

$$\boxed{P \times V = K}$$

Los datos del cuadro de valores se pueden representar gráficamente de igual manera que en el ejemplo anterior, pero en este caso la gráfica dará siempre como resultado una curva denominada **hipérbola equilátera**.



La aproximación y el error en las mediciones

Si se dijera a los alumnos que cada uno de ellos midiera con una regla la longitud de un banco determinado, en general cada medición sería diferente a la otra aunque la gran mayoría (si no todas) estarían cerca de un valor determinado. El valor de Δx está asociado a limitaciones en los instrumentos y al método de medición así como al observador, y estos pueden clasificarse como:

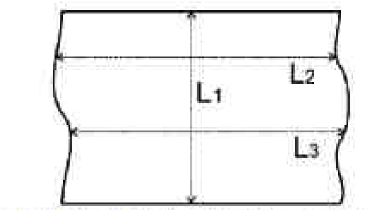
1) **Errores sistemáticos:** se originan por imperfecciones en el método de medición y afectan a los resultados siempre en el mismo sentido, esto es, por defecto o por exceso. Estos errores se pueden detectar y corregir. Provienen de:

   a) Errores de calibración del aparato de medida.
   b) Utilización de un instrumento apto pero inadecuado para la medida que se desea realizar.
   c) Influencia grosera del observador.
   d) Utilización de una teoría defectuosa.
   e) Empleo de una información inadecuada.

   Dentro de los sistemáticos podemos identificar los siguientes errores:

   a) De apreciación: mínima división que se puede resolver con el instrumento de medición. Por ejemplo, si se quiere determinar la masa de un cuerpo utilizando una balanza con una apreciación de 10g, no se podrá distinguir si la masa pesa 1,01 kg ó 1,014 kg porque la balanza no es capaz de distinguir esta diferencia.
   b) De exactitud: error absoluto con el que el instrumento de medición ha sido calibrado. Los instrumentos de medición (como una regla) han sido calibrados con respecto a un valor patrón (metro patrón). Si la calidad de la calibración no ha sido buena o si, dadas las condiciones de trabajo, esta calibración ha cambiado, el instrumento de medición no arrojará mediciones confiables. Sin embargo, en este apunte, se asumirá que todos los instrumentos están bien calibrados.
   c) De interacción: es debido a la interacción del método de medición con el objeto a medir. Este tipo de error se presenta, por ejemplo, cuando se quiere determinar el valor de una resistencia R utilizando la ley de Ohm. Para ello se mide la corriente que circula por la resistencia R cuando esta es conectada a una diferencia de tensión V generada por una fuente de tensión continua. Para realizar la medición se utiliza un amperímetro conectado en serie a la resistencia y en general se asume al amperímetro como ideal. Sin embargo, el amperímetro posee una resistencia interna que afecta a la medición. Entonces la resistencia total del circuito no es R sino (R + R del Amperímetro) por lo que el valor de la corriente medida (Im), es menor que la corriente (I) que circula por el circuito cuando no está conectado el amperímetro.

d) <u>De definición</u>: asociado con la falta de definición de la magnitud a medir. Este tipo de error se presenta, por ejemplo, cuando se quiere asignar un valor a la longitud de un objeto con bordes irregulares. En la figura (a continuación) se observa que la longitud L1 está bien definida pero, en cambio, la longitud transversal no (L2 L3).



Medición de la longitud de un objeto

2) **<u>Errores estadísticos</u>:** se producen al azar y pueden cometerse, con igual probabilidad, por defecto y por exceso. A estos errores se los puede reducir considerablemente.

3) **<u>Errores ilegítimos o espurios</u>:** se deben a errores en fórmulas o cálculos.

Al realizar un proceso de medición es necesario saber con que grado de verdad han sido realizadas las mediciones de las diferentes magnitudes.

Sabemos que al realizar una medición siempre se cometen pequeños errores en la misma, lo cual permite explicar porque cuando dos o mas personas miden una misma magnitud no obtienen los mismos valores, en consecuencia no es lógico hablar del verdadero valor de una medida, pues siempre existirá un factor que introduzca un error en el proceso de la medición. Por eso en física se habla del **valor más probable de la medición** y no de un valor verdadero.

<u>Valor más probable</u>

Dada una serie de valores medidos de una misma magnitud, se denomina valor mas probable, al promedio entre todos los valores medidos. A este valor también se lo conoce con el nombre de valor medio (o media aritmética) y se lo simboliza con una línea por sobre la abreviatura de la magnitud medida.

Continuando con el experimento de los alumnos que miden los bancos con una regla, si enumeramos a cada alumno según la lista (alfabéticamente) y si cada medición realizada por cada alumno se la llama **Xi** con $1 \leq i \leq 36$ es decir:

Alumno 1 $\longrightarrow$ medición X1
Alumno 2 $\longrightarrow$ medición X2
. .
. .
Alumno 36 $\longrightarrow$ medición X36

Entonces el valor más probable se calculará como:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{X1 + X2 + \ldots + Xi + \ldots + Xn}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}}$$

Donde:

$\overline{X}$ = Valor más probable.
Xi = orden de la medición (medición 1, medición 2…medición 20…medición 36)
n = cantidad total de mediciones.

$\sum =$ Sumatoria.

Ejemplo de aplicación 1:

Durante la realización de un trabajo práctico de física, los alumnos de segundo año de El Cuba deben realizar 3 mediciones con la regla, de la longitud de una hoja de carpeta, luego de realizarlas obtienen las siguientes longitudes (se simbolizaran las mediciones de longitud con la letra X):

X1= 20 cm; X2= 20,2 cm y X3= 19,9 cm.

El objetivo de este trabajo es obtener el valor mas probable de la longitud de la hoja ($\overline{X}$).

Para acostumbrarnos desde el primer problema, para resolver el mismo como primer paso escribiremos por un lado los datos, por el otro las incógnitas y por otro las posibles fórmulas a utilizar.

1) Datos:	**Incógnitas:**	**Posibles fórmulas:**
X1= 20cm X2= 20,2 cm X3= 19,9 cm n = 3	$\overline{X}$	$\overline{X} = \frac{X1 + X2 + X3}{n}$

2) En segundo lugar habiendo analizado la fórmula que vamos a utilizar, procedemos a escribirla y luego reemplazar los datos en la misma.

$$\overline{X} = \frac{X1 + X2 + X3}{3} = \frac{20cm + 20{,}2cm + 19{,}9cm}{3} = 20{,}03cm$$

3) Como último paso se procede a enunciar la respuesta al problema planteado.

El valor más probable de las mediciones realizadas por los alumnos es $\boxed{\overline{X} = 20{,}03 \text{ cm} = 20 \text{ cm.}}$

Error absoluto (ΔXi)

Es la diferencia entre el valor de la medida y el valor tomado como más probable. Puede ser positivo o negativo, según si la medida es superior al valor real o inferior. Tiene unidades, las mismas que las de la medida.

$$\boxed{\Delta Xi = Xi - \overline{X}}$$

Si $\begin{cases} \Delta Xi > 0 : Exceso \\ \Delta Xi < 0 : Defecto \end{cases}$

Ejemplo de aplicación 2:

Utilizando los datos del ejemplo de aplicación 1, hallar los errores absolutos.

1) Datos: **Incógnitas:** **Posibles fórmulas:**

X1= 20cm ΔXi $\Delta Xi = Xi - \overline{X}$
X2= 20,2 cm
X3= 19,9 cm
$\overline{X} = 20cm$
n = 3

2) $\Delta Xi = Xi - \overline{X}$

$\Delta X1 = (20 - 20)cm = 0cm$
$\Delta X2 = (20{,}2 - 20)cm = +0{,}2cm$, $\Delta xi > 0 : Exceso$
$\Delta X3 = (19{,}9 - 20)cm = -0{,}1cm$, $\Delta xi < 0 : Defecto$

Error máximo del valor más probable

Es la máxima desviación en valor absoluto, es decir que es el máximo de los errores absolutos sin importar si el mismo es positivo o negativo. Al error máximo se lo afecta de doble signo.

$$\boxed{Em = \pm|\Delta Ximáx|}$$

Conociendo el error máximo de una magnitud es posible escribir la misma en forma correcta.

Ej.: $\boxed{L = \overline{L} \pm Em}$

Ejemplo de aplicación 3:

Cuando un número de mediciones independientes se toman con intención de obtener la mejor respuesta posible (la más cercana al valor real), el resultado se suele expresar con la media aritmética de las lecturas, con el posible intervalo de error, como la mayor desviación de lo obtenido. Como se muestra en el siguiente ejemplo:

Cuatro observadores efectuaron un conjunto de mediciones independientes de tensión, que se registraron como: 117,02V; 117,11V; 117,08V; 117,03V. Calcular: a) La tensión promedio; b) El rango de error.

a)

$$\bar{E} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{n}$$

$$\bar{E} = \frac{117{,}02V + 117{,}11V + 117{,}08V + 117{,}03V}{4} = 117{,}06V$$

b)

$Em = Emáx - \bar{E} = 117{,}11V - 117{,}06V = 0{,}05V$

Entonces el resultado se expresa como: $E = \bar{E} \pm Em \rightarrow E = (117{,}06 \pm 0{,}05)V$

Error relativo (er)

El **error absoluto** presenta el inconveniente de que no nos da una idea real de que tan buena fue la medición. Si por ejemplo nos informan que dos alumnos cometieron el mismo error absoluto por defecto de -0,3 metros, pero el primero midió la longitud de una cancha de fútbol (100 metros) y el segundo midió una mesa de 1 metro de largo, ¿quién realizó una mejor medición? Por este motivo es que aparece el **error relativo**.

El error relativo se calcula como, el cociente (la división) entre el **error absoluto** y el **valor más probable**.

$$\boxed{er = \frac{\Delta Xi}{\overline{X}}}$$

$$\boxed{er1 = \frac{\Delta X1}{\overline{X}} = \frac{-0,3m}{100m} = -0,003 = -3.10^{-3}; Defecto}$$

$$\boxed{er2 = \frac{\Delta X2}{\overline{X}} = \frac{-0,3m}{1m} = -0,3 = -3.10^{-1}; Defecto}$$

De estos dos resultado podemos sacar la conclusión de que el primer alumno obtuvo una mejor medición, ya que el error relativo (a la cancha de futbol) de su medición fue menor que el error relativo (a la mesa) de la medición del segundo alumno.

Ejemplo de aplicación 4:

Utilizando los datos del ejemplo de aplicación 1 y 2, hallar los errores relativos.

1) Datos:	**Incógnitas:**	**Posibles fórmulas:**
X1= 20cm	er	$er = \frac{\Delta Xi}{\overline{X}}$
X2= 20,2 cm X3= 19,9 cm $\overline{X} = 20cm$ n = 3 $\Delta X1 = 0cm$ $\Delta X2 = +0,2cm$ $\Delta X3 = -0,1cm$		

2) $er = \frac{\Delta Xi}{\overline{X}}$

$$er1 = \frac{\Delta X1}{\overline{X}} = \frac{0cm}{20cm} = 0$$

$$er2 = \frac{\Delta X2}{\overline{X}} = \frac{+0,2cm}{20cm} = +0,01; Exceso$$

$$er3 = \frac{\Delta X3}{\overline{X}} = \frac{-0,1cm}{20cm} = -0,005; Defecto$$

Error relativo porcentual (er%)

Si se multiplica al **error relativo** por 100 se obtiene el tanto por ciento (%) de error o **error relativo porcentual**. Al igual que el error absoluto puede ser positivo o negativo (según lo sea el error absoluto) porque puede ser por exceso o por defecto, no posee unidades.

$$er\% = \frac{\Delta Xi}{\overline{X}}.100 = er.100$$

Entonces en el ejemplo de la medición de la cancha de fútbol del alumno 1 y de la medición de la mesa del alumno 2, el error relativo porcentual se calcula como:

$er1\% = er1.100 = -3.10^{-3}.100 = -0,3\%$, se lee 0,3% por defecto.

$er2\% = er2.100 = -3.10^{-1}.100 = -30\%$, se lee 30% por defecto.

¿Qué entendemos por tolerancia cuando hablamos de resistencia eléctrica?

Cuando debemos comprar resistencias para armar algún circuito electrónico, o cuando estudiamos el código de colores de las mismas, aparece la palabra tolerancia.

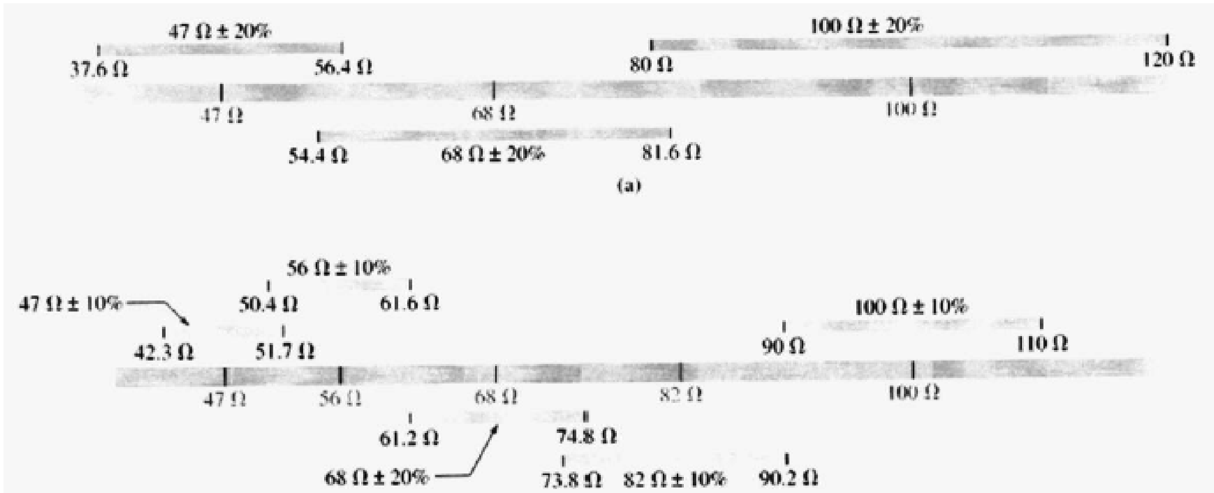
Al conocer las tablas de valores comerciales de las mismas, vemos que existen resistencias con tolerancias de: ±20%; ±10%, ±5%, etc.

¿Qué significa que una resistencia tenga un valor de 100Ω ± 5%?

En este caso el ± 5% expresa el error relativo porcentual de esa resistencia (llamado tolerancia). Al expresar el valor de la resistencia de esta forma, el fabricante nos asegura que el valor verdadero de la resistencia se encuentra dentro de ese intervalo, en nuestro ejemplo, 100Ω + 5Ω y 100Ω - 5Ω, o sea entre 95Ω y 105Ω.

Otro ejemplo, si un resistor de 1000Ω tiene una tolerancia del 10%, su valor puede oscilar entre 900Ω y 1100Ω.

A continuación podemos ver ejemplos en resistencias con tolerancias de ±20% y ±10%.



Como conclusión podemos decir: La tolerancia de una resistencia eléctrica / resistor es el valor óhmico que nos indica que tanto (en porcentaje) puede variar el valor de la resistencia, o sea, esta se define como el campo comprendido entre el valor máximo y el mínimo de su valor indicado por el fabricante.

Propagación de errores

Existen magnitudes que no se miden directamente sino que se derivan de otras magnitudes que si se miden directamente. Por ejemplo, sea V una magnitud que se determina a través de las magnitudes x, y, z.

Y sean Δx, Δy y Δz, los errores correspondientes a las magnitudes x, y, z. Entonces el error en V estará determinado por los valores de las magnitudes y de sus errores respectivos.

Hasta el momento solo vimos que ocurre al medir una magnitud. Ahora veremos que ocurre cuando se opera matemáticamente con magnitudes medidas con error.

Al calcular superficies, volúmenes, velocidades, etc., debo tomar más de una medición (ancho, largo en el caso de una superficie) y realizar una operación matemática (ancho X largo). Cuando medimos el largo obtenemos el valor más probable $\overline{X}$ y le asignamos una cota de error $\pm \Delta X$ que nos asegura que el valor verdadero esta dentro de $\overline{X} \pm \Delta X$.

Ejemplo:

$\overline{L} = 5m$ y $\Delta L = \pm 0{,}05m$ se escribe $L = \overline{L} \pm \Delta L \Rightarrow L = (5 \pm 0{,}05)m$

El valor $\pm 0{,}05m$ se puede obtener de una estimación o bien del experimento de la medición del banco tomando el mayor ΔXi.

Cuando en el taller se les pide limar la altura de un prisma de 100mm con una precisión de 1 décima, les están diciendo que $H = \overline{H} \pm \Delta H = (100 \pm 0{,}1)mm$. Es decir que se aprobará la pieza siempre que sea mayor o igual a 99,9mm y menor o igual que 100,1mm, es decir 99,9mm$\leq$H$\leq$100,1mm.

También puede escribirse a H=100,0mm pues cuando no se da ninguna información adicional la cota de error se obtiene de estimar ± 1 de la última cifra significativa.

Ejemplos:

L=100m $\Rightarrow \Delta L = \pm 1m$

d=100,0m $\Rightarrow \Delta d = \pm 0{,}1m$

e= 0,10Km $\Rightarrow \Delta e = \pm 0{,}01Km = \pm 10m$

f=100.10^3 m $\Rightarrow \Delta f = \pm 1000m$

Ahora que está clara la nomenclatura se quiere saber, con que error obtendré la superficie $S = \overline{S} \pm AS$ si tengo como datos: $L = \overline{L} \pm \Delta L$ y $A = \overline{A} \pm \Delta A$.

Se puede demostrar que:

- **El error absoluto de una suma o de una resta es la suma de los errores absolutos (ΔX)**

Dados $a = \overline{a} \pm \Delta a$ y $b = \overline{b} \pm \Delta b$;

Se tiene
$$\begin{cases} a + b = (\overline{a} + \overline{b}) \pm (\Delta a + \Delta b) \\ a - b = (\overline{a} - \overline{b}) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{cases}$$

Ejemplos:

Sumar 826 ± 5 con 628 ± 3.

A= 826 ± 5 => $\bar{A} = 826$ y $\Delta_A = 5$
B= 628 ± 3 => $\bar{B} = 628$ y $\Delta_B = 3$

A+B= $(\bar{A} + \bar{B}) \pm (\Delta_A + \Delta_B) = (826 + 628) \pm (5 + 3)$
A+B= 1454 ± 8

Sustraer 628 ± 3 de 826 ± 5 y expresar el rango de incertidumbre como porcentaje en la respuesta.

SOLUCION

$$N_1 = 826 \pm 5 \ (= \pm 0.605\%)$$
$$N_2 = 628 \pm 3 \ (= \pm 0.477\%)$$
$$\text{Diferencia} = 198 \pm 8 \ (= \pm 4.04\%)$$

Observación: el Δx no debe expresarse con más cifras significativas que el valor más probable.

El error absoluto de un producto o un cociente se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a \times b = (\overline{a} \times \overline{b}) \pm (\overline{a} \times \Delta b + \overline{b} \times \Delta a) \\ a \div b = (\overline{a} \div \overline{b}) \pm \dfrac{(\overline{a} \times \Delta b + \overline{b} \times \Delta a)}{\overline{b}^2} \end{cases}$$

El error relativo de un producto o un cociente es la suma de los errores relativos.

Ejemplo:

Dados $a = \bar{a} \pm era$ y $b = \bar{b} \pm erb$

Se tiene
$$\begin{cases} a.b = (\bar{a}.\bar{b}) \pm (era + erb) = (\bar{a}.\bar{b}) \pm (\dfrac{\Delta a}{\bar{a}} + \dfrac{\Delta b}{\bar{b}}) \\ \\ a \div b = (\bar{a} \div \bar{b}) \pm (era + erb) = (\bar{a} \div \bar{b}) \pm (\dfrac{\Delta a}{\bar{a}} + \dfrac{\Delta b}{\bar{b}}) \end{cases}$$

El error relativo de una potencia es el producto de la potencia por el error relativo de la magnitud.

Sea $A = \bar{A} \pm \Delta A$, se pide calcular A^n:

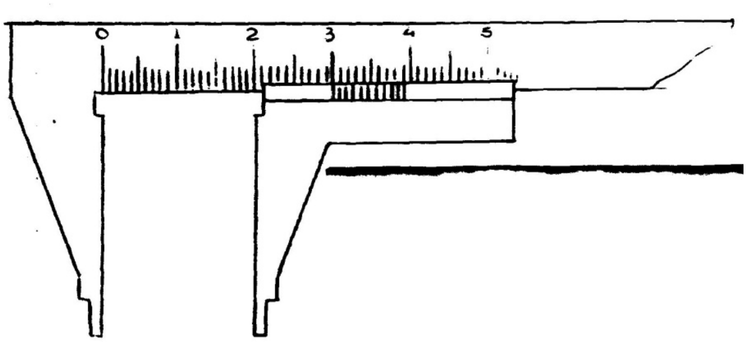
$$\boxed{A^n = \bar{A}^n \pm |n|.\frac{\Delta A}{\bar{A}}}$$

Instrumentos de Medición

Longitudes $\Rightarrow$ Reglas graduadas (al milímetro, al medio milímetro, etc.)
Tiempos $\Rightarrow$ cronómetros, relojes, etc.
Pesos $\Rightarrow$ Balanzas.

Nonius o Vernier

También llamado *calibre*, se utiliza para realizar mediciones de longitud con precisión mayor a la de las reglas graduadas (disminuye las bandas de error, que es ahora menor al medio milímetro).



La regla móvil tiene 10 divisiones coincidentes con 9 de la regla mayor. Esto significa que cada división de la regla mas chica es 0,1mm = $\frac{1}{10}$ mm menor que la de la regla mayor con lo cual obtenemos que la aproximación del vernier es 1 décimo (mm). Esto se comprueba al multiplicar la cantidad de divisiones de la regla chica (10) por la aproximación (0,1mm) [10 x 0,1mm = 1mm] que es la diferencia que se observa en la figura entre 10 divisiones de la regla fija y 10 de la móvil.

En el caso de tener una aproximación de $\frac{1}{20}$ mm, 19 divisiones de la regla mayor equivalen (corresponden) a 20 de la menor.

Cálculo de la aproximación del Vernier:

$$\boxed{A = \frac{d}{Nv}}$$

Donde:

A: aproximación.
d: menor división de la regla mayor.
Nv: número de divisiones de la regla móvil (o vernier).

Ejemplo de aplicación 5:

¿Qué aproximación tiene un vernier cuya regla mayor está graduada en milímetros y su regla menor tiene 20 divisiones?

1) Datos:	**Incógnitas:**	**Posibles fórmulas:**
d=1mm	A	$A = \frac{d}{Nv}$
Nv=20div		

2) Resolución

$$A = \frac{d}{Nv} = \frac{1mm}{20div} = 0{,}05mm$$

Micrómetro

El micrómetro llega a tener una aproximación de $\frac{1}{100}mm$. Consta de un tornillo cuyo paso de rosca es de 1mm, es decir al girar el tambor una vuelta completa, este avanza o retrocede 1mm. Este tambor tiene 50 ó 100 divisiones taradas en su periferia y hace las veces de vernier. Si el número de divisiones del tambor es de 50 y el paso (del tornillo) es de 1mm, la aproximación será: $A = \frac{d}{Nv} = \frac{1mm}{50} = 0{,}02mm$.

La figura muestra un moderno micrómetro digital.

Reloj comparador

Es un instrumento que permite realizar comparaciones de medición entre dos objetos. También tiene aplicaciones de alineación de objetos en maquinarias. Necesita de un soporte con pie magnético.

Gramil o calibre de altitud

Es un instrumento capaz de realizar mediciones en altura verticalmente, y realizar señalizaciones y paralelas en piezas.

Presentación de datos

Existen distintas maneras de presentar los valores de magnitudes medidas o determinadas de manera indirecta, siendo las más usuales las tablas y los gráficos.

Tablas

Las tablas están formadas por celdas, ordenadas en filas y columnas, donde se informa un valor. Generalmente las distintas mediciones de una misma magnitud física se ordenan en una columna siendo el número de columnas de la tabla proporcional a la cantidad de magnitudes informadas y el número de filas, proporcional al número de mediciones realizadas. En cada columna, la primera celda (encabezado) se utiliza para informar a que magnitud corresponden los valores de la columna con la unidad correspondiente. Para informar los errores asociados a la magnitud, se puede utilizar otra columna (con su correspondiente encabezado). En el caso que el error asociado a cada medición sea el mismo, el valor del error se puede informar en el encabezado de la correspondiente magnitud.

Ejemplo

En la tabla se muestran los valores medidos de la corriente (i) que circula por una resistencia para distintos valores de voltaje (v) aplicado a los bornes de la misma.

$i\,(\pm1)mA$	$v(V)$	$\Delta v(V)$
10	1,0	0,1
21	2,1	0,1
29	2,9	0,2
40	4,0	0,2
51	5,1	0,1

Mediciones de corriente y voltaje en una resistencia.

En esta tabla se observa que la primera celda de cada columna indica que magnitud se informa en dicha columna con su unidad correspondiente. Para el caso de corriente i, como todos los valores tienen el mismo error (1 mA) se optó por informar el error en el encabezado de la columna. En el caso del voltaje v, el error se informo en otra columna (Δv(V)). En la columna se indica que el valor de corriente i = (10 ± 1)mA se corresponde a un valor de voltaje v = (1,0 ± 0,1)V.

Ejercicios

1) Observando la tabla anterior, indique el valor de voltaje v correspondiente a una corriente i=(40 ± 1)mA.

- $v = (4{,}0 \pm 0{,}1)V.$
- $v = (2{,}9 \pm 0{,}2)V.$
- $v = (4{,}1 \pm 0{,}2)V.$

2) En base a la misma tabla, indique el valor de corriente i correspondiente a un voltaje v = (2,8 ± 0,2)mA.

- $i = (29 \pm 1)mA.$
- $v = (29 \pm 1)V.$
- $v = (29 \pm 0{,}2)mA.$

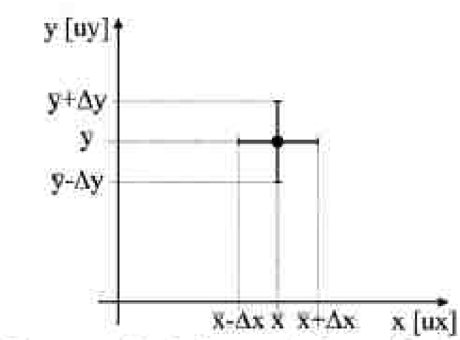
Gráficos

En general, los gráficos se utilizan para presentar los valores de dos magnitudes físicas relacionadas (par de valores) para estudiar la dependencia entre las mismas. Todo gráfico está formado por dos ejes perpendiculares (solo nos referiremos al caso de gráficos para dos magnitudes pero todo puede generalizarse para representar un número mayor de magnitudes) en los cuales se indica la magnitud que se representa con la unidad correspondiente. Cada eje tiene una escala adecuada que también debe ser indicada en el eje. La elección de la escala debe realizarse de acuerdo a los valores de la magnitud que serán representados en la misma de manera tal que todos los valores puedan ser presentados y que el gráfico ocupe la mayor área posible de la hoja utilizada.

Cada par de valores es representado con un punto ubicado en la posición correspondiente de acuerdo a las escalas elegidas. El error de cada magnitud se representa como un segmento centrado en el punto cuya longitud es igual a dos veces el error de dicho valor.

Para el caso de dos magnitudes medidas x e y con valores informados:

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)[ux] \text{ e } y = (\bar{y} \pm \Delta y)[uy]$$



. Representación de dos magnitudes medidas en un gráfico.

En caso que uno o ambos errores tengan un valor muy chico respecto a la escala y no sea posible graficarlo/s, se acepta graficar un punto de mayor tamaño e indicar que el tamaño del punto contiene el/los error/es.

Ejemplo

La figura muestra el gráfico correspondiente al ejemplo presentado en la sección anterior (Tabla) de mediciones de corriente y voltaje.

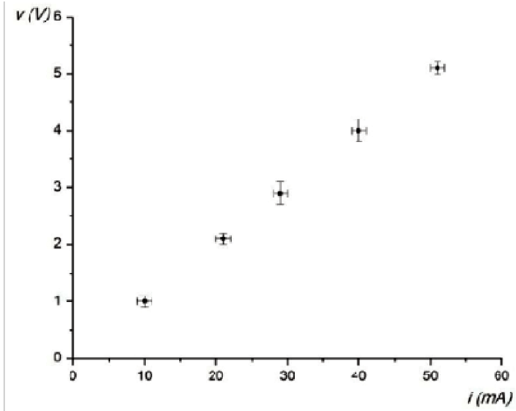


Figura 2. Gráfico de corriente (i) y de voltaje (v) medidos.

<u>Webs de interés y consulta</u>:

- http://www.intertools.com.mx/
- http://es.wikipedia.org/wiki/Metrolog%C3%ADa
- http://www.metrologia.cl/inicio/index.act
- http://www.inti.gov.ar/sabercomo/inti-0104/inti6.htm

"Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"
(BENJAMIN FRANKLIN)

Apéndice A

En muchos informes de laboratorio, al valor más probable se lo llama la media de los valores y al error absoluto de una medición se lo conoce con el nombre de desviación de la media.

Desviación de la media

Desviación es el alejamiento de una lectura dada de la media aritmética. Si la desviación de la primera lectura, X1, se la llama d1, y la de la segunda lectura, X2, es d2 y así sucesivamente, entonces, las desviaciones de la media se expresan como:

$$d_1 = X_1 - \overline{X}, \qquad d_2 = X_2 - \overline{X}, \qquad d_n = X_n - \overline{X}$$

Nótese que la deviación de la media puede tener un valor positivo o negativo y que la suma algebraica de todas las desviaciones debe ser cero.

Ejemplo:

Seis observadores tomaron un conjunto de mediciones independientes de corriente y los registraron como 12.8 mA, 12.2 mA, 12.5 mA, 13.1 mA, 12.9 mA y 12.4 mA. Hay que calcular a) media aritmética; b) desviaciones de la media.

SOLUCION a) Con la ecuación (1-1), la media aritmética es igual a

$$\bar{x} = \frac{12.8 + 12.2 + 12.5 + 13.1 + 12.9 + 12.4}{6} = 12.65 \text{ mA}$$

b) con la ecuación (1-2) las desviaciones son

$$d_1 = 12.8 - 12.65 = 0.15 \text{ mA}$$
$$d_2 = 12.2 - 12.65 = -0.45 \text{ mA}$$
$$d_3 = 12.5 - 12.65 = -0.15 \text{ mA}$$
$$d_4 = 13.1 - 12.65 = 0.45 \text{ mA}$$
$$d_5 = 12.9 - 12.65 = 0.25 \text{ mA}$$
$$d_6 = 12.4 - 12.65 = -0.25 \text{ mA}$$

Muchas veces en vez de buscar el error absoluto máximo para expresar una medición se utiliza el valor de la desviación promedio.

Desviación promedio

La desviación promedio es una indicación de la precisión de los instrumentos usados en las mediciones. Los instrumentos altamente precisos producen una desviación promedio baja entre lecturas. Por definición, la desviación promedio es la suma de los valores absolutos de las desviaciones, entre el número de lecturas. El valor absoluto de la desviación es el valor sin signo. La desviación promedio se puede expresar como:

$$D = \frac{|d_1| + |d_2| + \left|d_3 + \cdots + |d_n|\right|}{n}$$

Ejemplo:

Calcúlese la desviación promedio para el ejemplo anterior.

$$D = \frac{0.15 + 0.45 + 0.15 + 0.45 + 0.25 + 0.25}{6} = 0.283 \text{ mA}$$

Existen otros valores considerados estadísticos como ser la desviación estándar.

Desviación Estándar

En análisis estadísticos de errores aleatorios, el cálculo de la desviación estándar es de mucha ayuda. Por definición la desviación estándar σ de un número de datos es la raíz cuadrada de la suma de todas las desviaciones cuadradas individuales, divididas entre el número de lecturas.

$$\sigma = \sqrt{\frac{{d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 + \cdots + {d_n}^2}{n}}$$

El desvío estándar es una medida de dispersión basada en la media y utiliza todos los datos. El desvío estándar representa una distancia típica de cualquier punto del conjunto de datos a su centro (medido por la media). Es una distancia promedio de cada observación a la media.