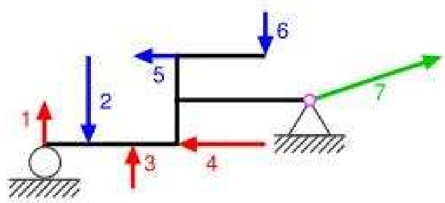
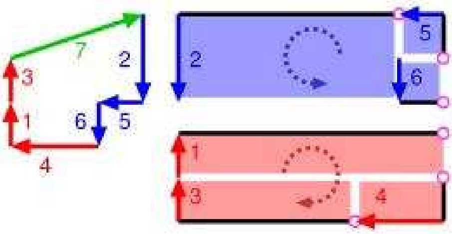
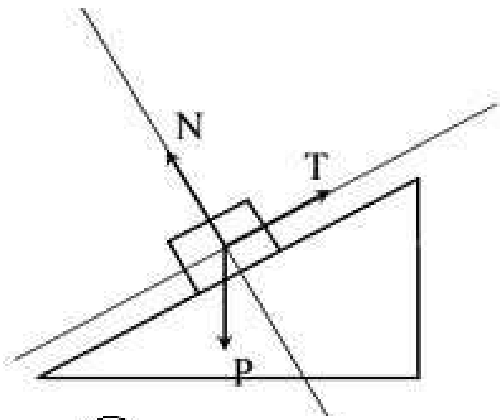
Unidad N°: 2 "Estática"

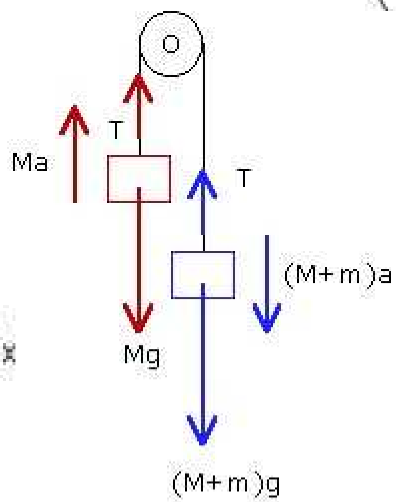
Parte A

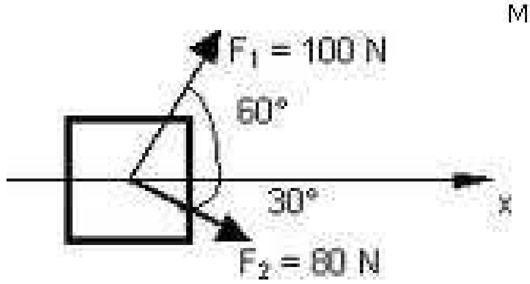


$$\sum_{(i)} \vec{F}_{(i)} = 0 \qquad \sum_{(i)} \vec{M}_{(i)} = 0$$









"Todo hombre, por naturaleza, desea saber"

¿Qué es la estática?

La **estática** es la parte de la física que estudia el equilibrio de fuerzas y las condiciones que deben cumplirse para que un cuerpo sobre el que actúan fuerzas o cuplas, o fuerzas y cuplas a la vez, quede en equilibrio. Un cuerpo está en equilibrio cuando se halla en reposo (o sea que está quieto) o en movimiento rectilíneo uniforme (es decir que siguiendo un camino en línea recta y a velocidad constante), todo esto ocurre cuando la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo es nula.

Para poder estudiar esta nueva unidad, es necesario definir una nueva magnitud que es la **fuerza.**

Fuerza

Según una definición clásica, fuerza es todo agente capaz de modificar la cantidad de movimiento o la forma de los cuerpos materiales. Es una **magnitud vectorial** y por lo tanto se la puede representar gráficamente por medio de un vector.

De acuerdo al SIMELA, la unidad de medida de una fuerza es el Newton (N), pero en la práctica se utiliza también el kilogramo fuerza ($\overrightarrow{kg}$).

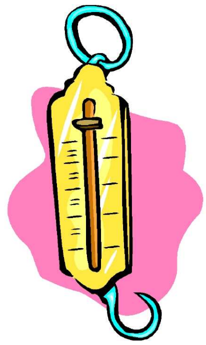
Equivalencia entre unidades

$$1\overrightarrow{kg} \longrightarrow 9{,}8\text{N}$$

$$1\text{N} \longrightarrow 0{,}102\overrightarrow{kg}$$

Medición de fuerzas: "El dinamómetro"

El **dinamómetro** es el instrumento que se utiliza para medir fuerzas.



La figura de la izquierda muestra un dinamómetro antiguo.

La imagen de la derecha muestra Un moderno dinamómetro de Tipo digital.

La escala de este instrumento esta graduada en $\overrightarrow{kg}$. Al aplicar una fuerza $\vec{F}$, el resorte se estira y la aguja indica la intensidad de la misma en la escala graduada. El dinamómetro se utiliza para medir la intensidad (módulo) de fuerzas por comparación con otros pesos.

Antes de describirlo, diremos que **un cuerpo es elástico**, cuando tiene la propiedad de modificar su forma (la longitud en el caso del resorte) por acción fuerzas exteriores y que retorna a la posición original al desaparecer las mismas.

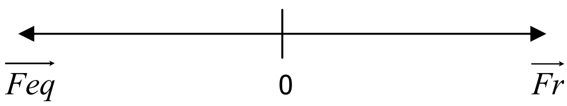
El dinamómetro emplea esta propiedad de elasticidad total que posee un resorte, al cual se le fija uno de los extremos, dejando el otro libre, donde se sujeta un **fiel** (flecha, indicador) que es el encargado de marcar sobre una escala (lineal) el estiramiento provocado por la fuerza que se aplica en el extremo libre del resorte.

Para marcar la escala del dinamómetro, se marca el cero en ausencia de fuerzas, luego se busca un peso conocido y exacto que obtenga la mayor elongación del resorte marcándolo en la escala y anotando su valor.

Finalmente se divide en un número entero (generalmente múltiplo de 10) el segmento entre el cero y el mayor estiramiento conocido (por ej. $10\overrightarrow{kg}$), quedando de esta manera la escala debidamente marcada.

Sistemas de fuerzas

Se denomina sistema de fuerzas a un conjunto de dos o más fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo.
Todas esas fuerzas componentes del sistema pueden reemplazarse por una única fuerza que cumpla con la misma función, a la cual se denomina **fuerza resultante** del sistema. Una vez encontrada la fuerza resultante de un sistema de fuerzas, como la estática estudia el equilibrio de los cuerpos, es necesario encontrar otra fuerza que equilibre al sistema, a la cual se la denomina **fuerza equilibrante**.
La fuerza equilibrante de un sistema tiene el mismo punto de aplicación, dirección e intensidad de la fuerza resultante, pero su sentido es opuesto.



$\overrightarrow{Feq}$ = Fuerza equivalente.

$\overrightarrow{Fr}$ = Fuerza resultante.

Antes de comenzar a clasificar los sistemas de fuerza, es necesario dar algunas definiciones y propiedades importantes.

- **Resultante de un sistema de fuerzas:** es aquella fuerza que puede reemplazar a todas las fuerzas del sistema provocando el mismo efecto.

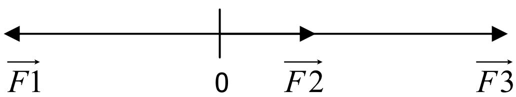
- **Cuerpo rígido:** es aquel que no se deforma aunque las fuerzas sean muy grandes.

- **Propiedad de las fuerzas:** el efecto de una fuerza es el mismo si se mantiene su módulo (intensidad), su sentido y su dirección a pesar que su punto de aplicación se desplace sobre la recta de acción de la misma.

Clasificación de los sistemas de fuerza

1) Fuerzas concurrentes y colineales:

Es aquel sistema en el cual todas las fuerzas parten desde un mismo punto de aplicación y tienen la misma dirección, pudiendo tener diferente intensidad y sentido.



- Si las fuerzas componentes del sistema tienen el **mismo sentido**, la fuerza resultante tendrá las siguientes características: igual punto de aplicación dirección y sentido que las fuerzas componentes, mientras que su intensidad se obtiene sumando las intensidades de las fuerzas componentes.
- Si las fuerzas componentes del sistema tienen **sentido opuesto**, la fuerza resultante tendrá las siguientes características: igual punto de aplicación y dirección que las fuerzas componentes, pero su

intensidad se obtiene efectuando la diferencia entre la mayor y la menor de las fuerzas, mientras que su sentidos será coincidente con el de la mayor de las fuerzas.

- Si se trata de un sistema de **varias fuerzas de sentido opuesto**, en ese caso se suman todas las fuerzas que tienen igual sentido, obteniendo así dos fuerzas resultantes parciales y luego se resuelve el sistema como en el caso anterior.

Para resolver un sistema de fuerzas concurrentes en un punto y colineales no es necesario realizar ningún gráfico (salvo que se pida en el ejercicio a resolver), sino que se resuelve algebraicamente. En el caso de que se pida la resolución gráfica debemos en primer lugar adoptar una escala para poder graficar las fuerzas en nuestra hoja. Para ello utilizaremos la siguiente fórmula:

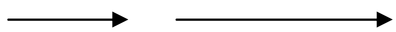
$$\boxed{Esc\vec{F} = \frac{|\vec{F}|}{\vec{LF}}}$$

<u>Ejemplo de aplicación 1</u>:

Dadas $\vec{F1}$ y $\vec{F2}$ resolver analítica y gráficamente el siguiente sistema de fuerzas colineales y concurrentes, según el caso que se pida.

$$\begin{cases} \vec{F1} = 2\vec{kg} \\ \vec{F2} = 3\vec{Kg} \end{cases}$$

a)



$\vec{F1}$ $\vec{F2}$

<u>Resolución gráfica</u>:

En este caso las fuerzas tienen el mismo sentido, entonces para resolver el sistema en forma gráfica, deberemos en primer lugar adoptar una escala y luego referir las dos fuerzas a un mismo punto de aplicación.

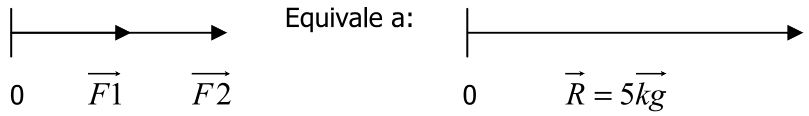
Vamos a elegir por conveniencia que la $\boxed{Esc\vec{F} = 1\frac{\vec{kg}}{cm}}$, aplicando la fórmula a ambas fuerzas obtendremos la longitud de las mismas.

Para $\vec{F1} \Rightarrow Esc\vec{F1} = \frac{|\vec{F1}|}{\vec{LF1}} \Rightarrow \vec{LF1} = \frac{|\vec{F1}|}{\vec{EscF1}} \Rightarrow \vec{LF1} = \frac{2\vec{kg}}{1\frac{\vec{kg}}{cm}} \Rightarrow \vec{LF1} = 2cm$

Para $\vec{F2} \Rightarrow Esc\vec{F2} = \frac{|\vec{F2}|}{\vec{LF2}} \Rightarrow \vec{LF2} = \frac{|\vec{F2}|}{\vec{EscF2}} \Rightarrow \vec{LF2} = \frac{3\vec{kg}}{1\frac{\vec{kg}}{cm}} \Rightarrow \vec{LF2} = 3cm$

De los cálculos realizados se obtuvo que la longitud con la que vamos a dibujar la $\vec{F1} = 2cm$ y $\vec{F2} = 3cm$.

Para realizar el gráfico debemos dibujar ambas fuerzas en un mismo punto de aplicación, respetando sus sentidos, sus intensidades, sus direcciones y sus longitudes.



Una vez obtenida la resultante que en este caso es la **suma** de las dos fuerzas porque tienen el **mismo sentido** $\vec{R} = 5cm$, aplicamos nuevamente la fórmula de escala de fuerza para obtener el valor de la intensidad de la fuerza.

$$Esc\vec{R} = \frac{\overrightarrow{|R|}}{L\vec{R}} \Rightarrow |\vec{R}| = Esc\vec{R} \cdot L\vec{R} \Rightarrow |\vec{R}| = 1\frac{\overrightarrow{kg}}{cm} \cdot 5cm \Rightarrow \boxed{|\vec{R}| = 5\overrightarrow{kg}}$$

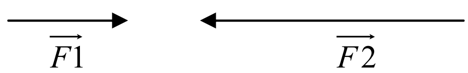
<u>Resolución analítica</u>:

Para resolver analíticamente el ejercicio, solo debemos mirar el sentido de las fuerzas, como tienen el mismo sentido, la resultante es la suma de las intensidades de ambas fuerzas.

$$\vec{R} = \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2} = 2\overrightarrow{kg} + 3\overrightarrow{kg}$$

$$\boxed{\vec{R} = 5\overrightarrow{kg}}$$

b)

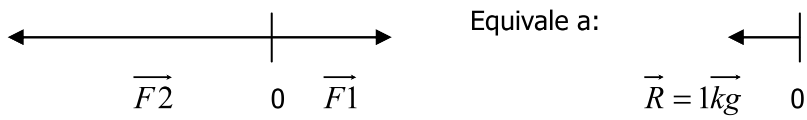


<u>Resolución gráfica</u>:

Para la resolución de este segundo caso tomaremos como $Esc\vec{F}$ la misma que en el primer caso, por lo tanto se obviarán todos los cálculos de las longitudes, porque las mismas se obtienen de aplicar nuevamente las fórmulas del primer caso.

$$L\overrightarrow{F1} = 2cm \text{ y } L\overrightarrow{F2} = 3cm$$

Para realizar el gráfico debemos dibujar ambas fuerzas en un mismo punto de aplicación, respetando sus sentidos, sus intensidades, sus direcciones y sus longitudes.



Una vez obtenida la resultante que en este caso es la **resta** de las dos fuerzas porque tienen **sentido opuesto**, (a la fuerza de mayor intensidad se le resta la de menor), entonces se obtiene $\vec{R} = 1cm$, aplicando nuevamente la fórmula de escala de fuerza se obtiene el valor de la intensidad de la fuerza resultante.

El sentido de la resultante será el mismo que el de la fuerza con mayor intensidad.

$$Esc\vec{R} = \frac{\overrightarrow{|R|}}{L\vec{R}} \Rightarrow |\vec{R}| = Esc\vec{R} \cdot L\vec{R} \Rightarrow |\vec{R}| = 1\frac{\overrightarrow{kg}}{cm} \cdot 1cm \Rightarrow \boxed{|\vec{R}| = 1\overrightarrow{kg}}$$

Resolución analítica:

Para resolver analíticamente el ejercicio, solo debemos mirar el sentido de las fuerzas, como tienen sentido opuesto, la resultante es la resta de la fuerza con mayor intensidad ($\overrightarrow{F2}$) y la de menor intensidad ($\overrightarrow{F1}$), (en ese orden).

$$\vec{R} = \overrightarrow{F2} - \overrightarrow{F1} = 3\overrightarrow{kg} - 2\overrightarrow{kg}$$
$$\boxed{\vec{R} = 1\overrightarrow{kg}}$$

El sentido de la resultante será el mismo que el de la fuerza con mayor intensidad.

2) Fuerzas concurrentes en un punto y no colineales:

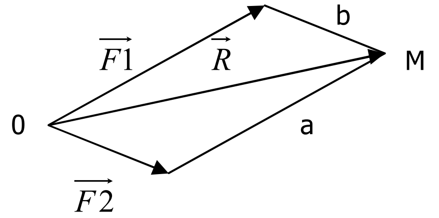
Es aquel sistema en el cual las fuerzas componentes del sistema parten de un mismo punto de aplicación y tienen distintas direcciones y sentidos.
Para resolver este tipo de sistemas se utiliza también un método analítico y uno gráfico. Por simplicidad comenzaremos explicando el método gráfico.
Si el sistema está formado por dos fuerzas solamente, se aplica el método gráfico denominado del paralelogramo.

Método del paralelogramo:

Este tipo de método de resolución es conveniente explicarlo a través de un ejemplo, es por eso que se planteará primero el problema y luego se enumerarán los pasos para su resolución.

Se tienen dos fuerzas de valor $\left|\overrightarrow{F1}\right| = 80\overrightarrow{kg}$ y $\left|\overrightarrow{F2}\right| = 60\overrightarrow{kg}$ que son representadas en el dibujo con longitudes:

$$L1 = \frac{\left|\overrightarrow{F1}\right|}{Esc\overrightarrow{F}} = \frac{80\overrightarrow{kg}}{20\frac{\overrightarrow{kg}}{cm}} = 4cm \text{ y } L2 = \frac{\left|\overrightarrow{F2}\right|}{Esc\overrightarrow{F}} = \frac{60\overrightarrow{kg}}{20\frac{\overrightarrow{kg}}{cm}} = 3cm$$



- Se traza una paralela a $\overrightarrow{F1}$ (segmento a) a partir del final (punta de flecha) del vector $\overrightarrow{F2}$.
- Se traza una paralela a $\overrightarrow{F2}$ (segmento b) a partir del final del vector $\overrightarrow{F1}$.
- Se traza el vector resultante $\vec{R}$ desde el punto "0" (donde concurren las fuerzas) hasta la intersección de a y b (punto M).

- Se mide el valor de la longitud de la resultante ($\vec{R}$), en este caso: LR= 6,4cm.
- Se calcula el módulo de $\vec{R}$: $\left|\vec{R}\right| = Esc\vec{F} \times LR$.

$$\left|\vec{R}\right| = 20\frac{\overrightarrow{kg}}{cm} \cdot 6{,}4cm \Rightarrow \boxed{\left|\vec{R}\right| = 128\overrightarrow{kg}}$$

Como ya se había explicado $\left|\vec{R}\right| \neq \left|\overrightarrow{F1}\right| + \left|\overrightarrow{F2}\right|$ pero sí se escribe que $\boxed{\vec{R} = \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2}}$.

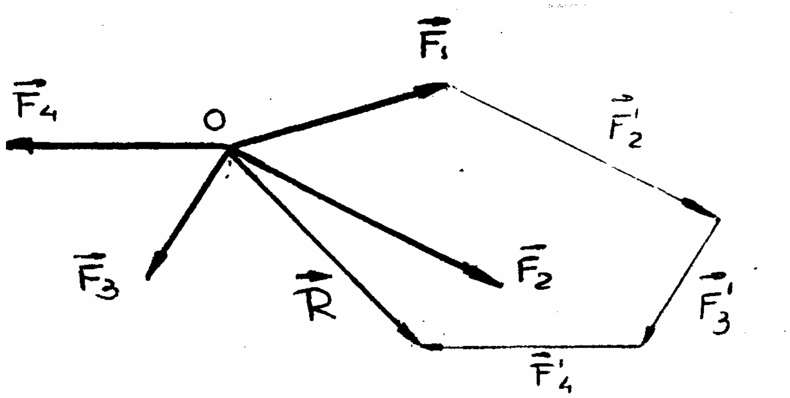
<u>Composición de varias fuerzas concurrentes</u>: <u>Método de la poligonal</u>

Dado el sistema original de fuerzas, a partir de una fuerza cualquiera se trazan las proyecciones paralelas de las demás fuerzas componentes del sistema, una a continuación de la otra, manteniendo la intensidad y el sentido de las fuerzas componentes.

Una vez proyectada la última de las fuerzas componentes del sistema, la fuerza resultante parte desde punto de aplicación y termina en el punto hasta donde haya llegado la proyección de la última fuerza.

Dadas:

$$\left|\overrightarrow{F1}\right| = 15\overrightarrow{kg}\ ;\ \left|\overrightarrow{F2}\right| = 20\overrightarrow{kg}\ ;\ \left|\overrightarrow{F3}\right| = 10\overrightarrow{kg}\ ;\ \left|\overrightarrow{F4}\right| = 15\overrightarrow{kg}$$



- Primero se verifican las longitudes de los vectores.
- A continuación de $\overrightarrow{F1}$ se coloca $\overrightarrow{F'2}$ paralela a $\overrightarrow{F2}$.
- Se repite el punto anterior con cada una de las fuerzas.
- Una vez que están dispuestas todas las fuerzas en vectores consecutivos a partir de "0", se cierra **la poligonal** con un vector desde "0" hasta el final de la última fuerza ($\overrightarrow{F'4}$ en este caso) y este vector es precisamente la resultante $\vec{R}$.
- Se mide luego LR que en este caso es: LR= 3,65cm y luego de calcula:

$$\left|\vec{R}\right| = Esc\vec{F} \cdot LR = 5\frac{\overrightarrow{kg}}{cm} \cdot 3{,}65cm \Rightarrow \boxed{\left|\vec{R}\right| = 18{,}25\overrightarrow{kg}}$$

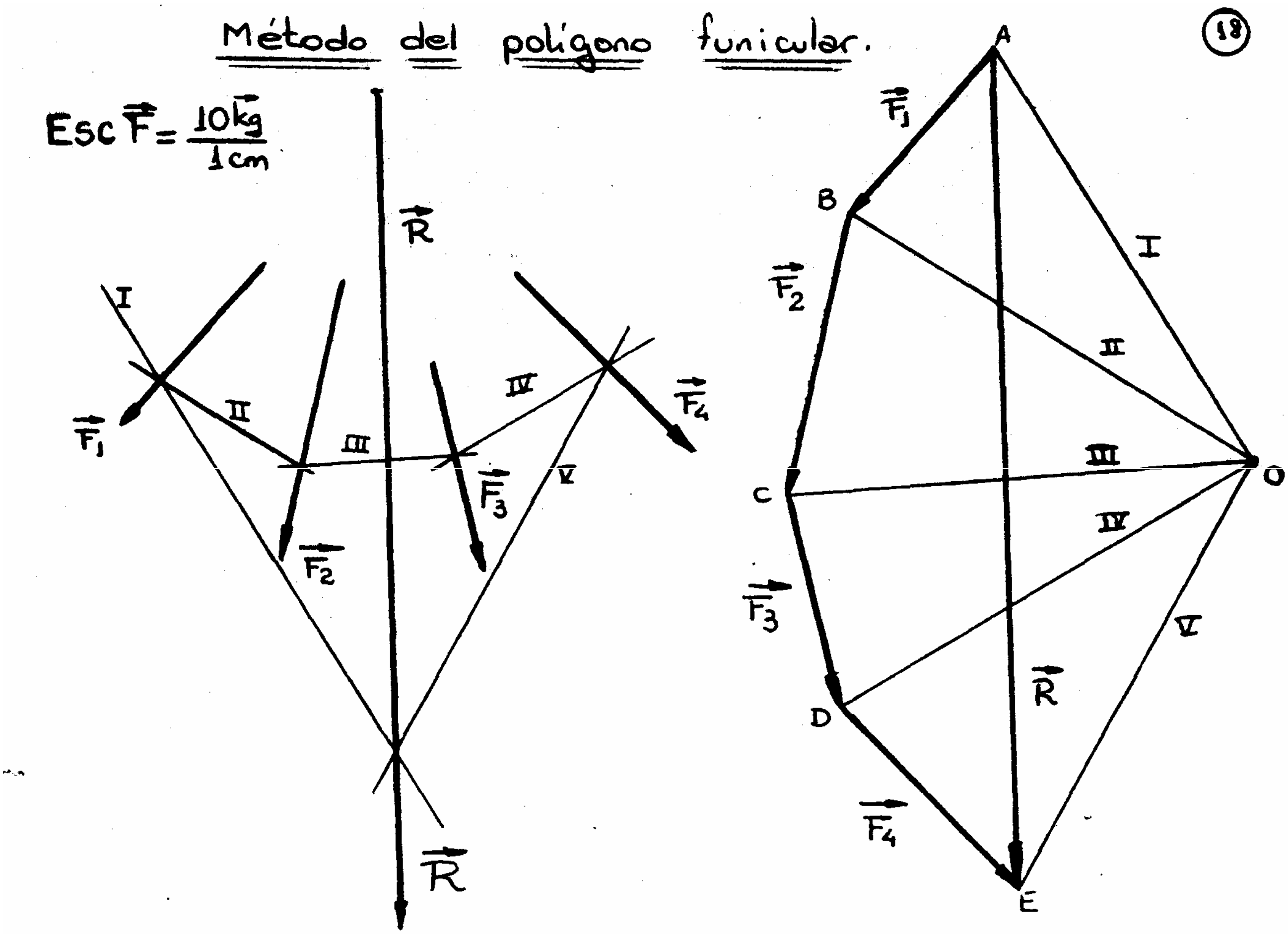
3) <u>Fuerzas no concurrentes en un punto y no colineales</u>:

Es aquel sistema en donde las fuerzas tienen diferentes puntos de aplicación y distintas direcciones.

Para resolver este sistema de fuerzas, se aplica otro método gráfico denominado método del polígono funicular.

<u>Método del polígono funicular</u>:

Este método permite hallar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes y coplanares.



Dado el sistema de fuerzas donde:

$\overrightarrow{F1} = 30\overrightarrow{kg}$; $\left|\overrightarrow{F2}\right| = 40\overrightarrow{kg}$; $\left|\overrightarrow{F3}\right| = 30\overrightarrow{kg}$; $\overrightarrow{F4} = 35\overrightarrow{kg}$.

- Se elige la escala para la representación, en este caso $10\frac{\overrightarrow{kg}}{cm}$.
- Se elige un punto cualquiera ubicado fuera del sistema a partir del cual se trazan las proyecciones paralelas de todas las fuerzas componentes del sistema, una a continuación de la otra, respetando el sentido y la intensidad de las mismas (figura del lado derecho de la hoja).

  Se traza una paralela a $\overrightarrow{F1}$ y se coloca ese vector fuera del sistema de fuerzas (segmento $\overline{ab}$).
- Se repite lo mismo con cada una de la fuerzas, quedando los segmentos ($\overline{bc}, \overline{cd} y \overline{de}$).

- Luego unimos el principio de la primera fuerza (pto. A) con el final de la última fuerza (pto. E) y, con ese sentido queda determinado el vector $\vec{R}$, cuyo módulo en este ejemplo es: $\left|\vec{R}\right| = \overline{AE} \cdot Esc\vec{F} = 11{,}65cm \cdot 10\frac{\overrightarrow{kg}}{cm} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{R}\right| = 116{,}5\overrightarrow{kg}}$

De esta manera obtuvimos la dirección, el sentido y la intensidad de la fuerza resultante, pero todavía nos falta averiguar el lugar por donde pasa la misma en el sistema original de fuerzas para ello debemos seguir los siguientes puntos.

- Se elige un punto "0", denominado polo, (borde derecho de la hoja).
- Se unen los puntos A, B, C, D y E con "0" determinando así los rayos polares I a V.
- Se traza una paralela al rayo I que corte a la recta de acción de $\overrightarrow{F1}$.
- Se traza una paralela al rayo II que pase por la intersección del rayo I y $\overrightarrow{F1}$ y que corte la recta de acción de $\overrightarrow{F2}$.
- Se repite el mismo procedimiento con los rayos III y IV.
- El rayo V debe tener una paralela que además de pasar por la intersección del rayo IV y $\overrightarrow{F4}$, corte la paralela del rayo I, donde pasa la recta de acción de $\vec{R}$, paralela al vector $\vec{R}$ del polígono.
- Finalmente se traslada la fuerza resultante al sistema original, tomando un punto concreto del cuerpo como punto de aplicación.

4) Fuerzas paralelas:

En este caso se puede dar que el sistema este formado por dos fuerzas de igual sentido o bien de sentido opuesto.

- Si el sistema está formado por dos fuerzas de igual sentido, la fuerza resultante tendrá las siguientes características: **su intensidad se obtiene sumando las intensidades de las fuerzas componentes, tendrá igual sentido y dirección paralela a las componentes, pasando entre medio de ambas direcciones, más cerca de la mayor de las fuerzas componentes.** Para determinar el lugar por donde pasa la fuerza resultante, se deben proyectar cada una de las fuerzas componentes sobre la recta de acción de la otra fuerza, respetando su intensidad y sentido. Luego se trazan líneas rectas que unan principio y fin de cada fuerza proyectada y por el punto donde se corten dichas rectas pasará la dirección de la fuerza resultante. Con respecto al punto de aplicación, debe ser un punto concreto del cuerpo (Fig. 1).

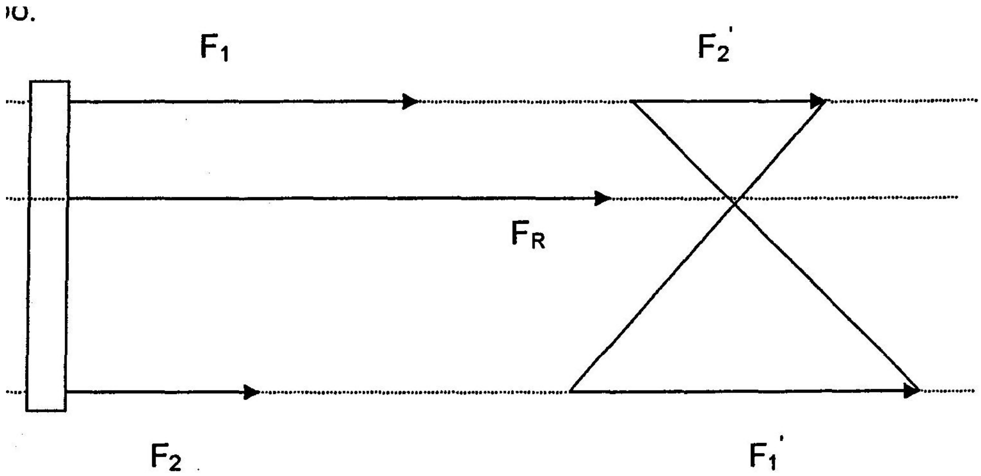


Fig. 1

- Si el sistema está formado por dos fuerzas de sentido opuesto, la fuerza resultante tendrá las siguientes características: **su intensidad se obtiene efectuando la diferencia entre la mayor y**

la menor de las fuerzas; el sentido será coincidente con el de la mayor de las fuerzas componentes; su dirección será paralela al de las componentes pasando por afuera, más cerca de la mayor de las fuerzas y el punto de aplicación será un punto concreto del cuerpo (Fig. 2).
Para determinar el lugar por donde pasa la fuerza resultante se aplica el mismo criterio que en el caso anterior.

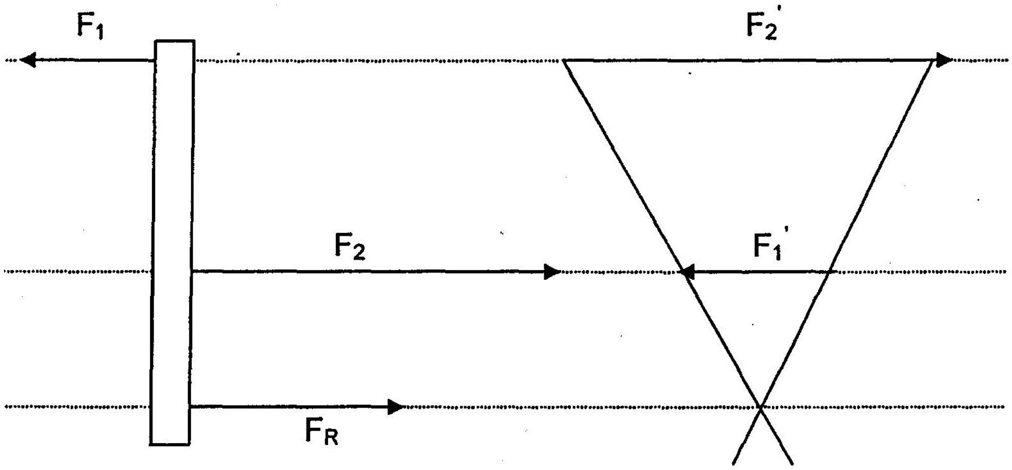


Fig. 2

Resoluciones analíticas

- Relación de Steven

Esta relación matemática nos permite calcular analíticamente las distancias que existen entre la resultante y las fuerzas aplicadas en todo sistema de fuerzas paralelas.

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{F1}}{d2} = \frac{\overrightarrow{F2}}{d1} = \frac{\vec{R}}{d}}$$

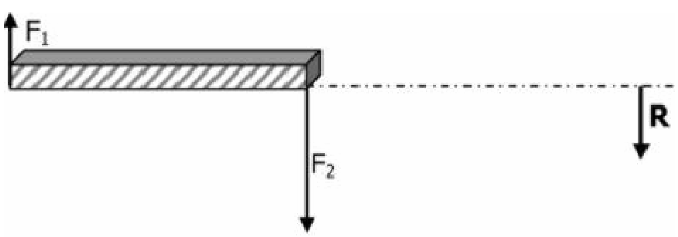
Donde:

d1= distancia entre $\overrightarrow{F1}$ y la resultante.
d2= distancia entre $\overrightarrow{F2}$ y la resultante.
d= distancia que separa a las fuerzas del sistema.

Ejemplo de aplicación 2:

Si la distancia que separa a las fuerzas $\overrightarrow{F1}$ y $\overrightarrow{F2}$ en el sistema de fuerzas paralelas de distinto sentido es de 39mm, calcular las distancias que hay entre $\vec{R}$ y cada una de las fuerzas, sabiendo que:

$\overrightarrow{F1} = 10\overrightarrow{kg}$
$\overrightarrow{F2} = 19\overrightarrow{kg}$



1) Hallamos analíticamente la resultante, como las fuerzas tienen sentido opuesto se resta a la fuerzas de mayor intensidad la de menor intensidad. La resultante tendrá el sentido de la fuerza de mayor intensidad.

$$\vec{R} = \overrightarrow{F2} - \overrightarrow{F1} \Rightarrow \vec{R} = 19\overrightarrow{kg} - 10\overrightarrow{kg}$$

$$\boxed{\vec{R} = 9\overrightarrow{kg}}$$

2) Como la relación de Steven posee tres miembros, tomaremos por partes de a dos para hallar por un lado **d1** y por otro lado **d2**.

$$\frac{\overrightarrow{F1}}{d2} = \frac{\vec{R}}{d} \Rightarrow \frac{10\overrightarrow{kg}}{d2} = \frac{9\overrightarrow{kg}}{39mm} \Rightarrow \frac{10\overrightarrow{kg} \times 39mm}{9\overrightarrow{kg}} = d2$$

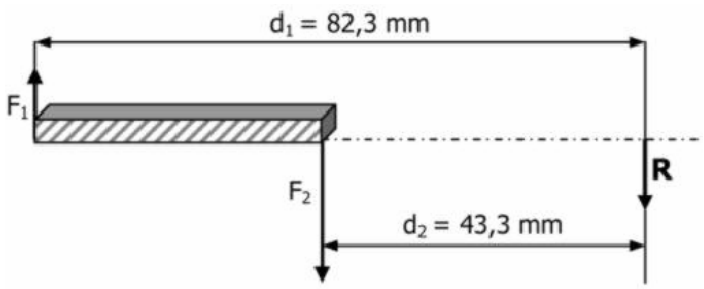
$$\boxed{d2 = 43{,}3mm}$$

3) Tomando el segundo miembro hallamos **d1**.

$$\frac{\overrightarrow{F2}}{d1} = \frac{\vec{R}}{d} \Rightarrow \frac{19\overrightarrow{kg}}{d1} = \frac{9\overrightarrow{kg}}{39mm} \Rightarrow \frac{19\overrightarrow{kg} \times 39mm}{9\overrightarrow{kg}} = d1$$

$$\boxed{d1 = 82{,}3mm}$$

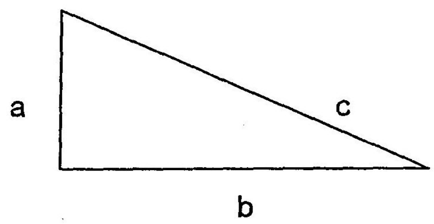
3) Por último graficamos el sistema de fuerzas con sus correspondientes medidas.



1) <u>Sistema de fuerzas concurrentes en un punto y no colineales que forman un ángulo de 90° entre sí</u>:

Para la resolución de este tipo de sistemas utilizaremos el **teorema de Pitágoras**, el cual formula:

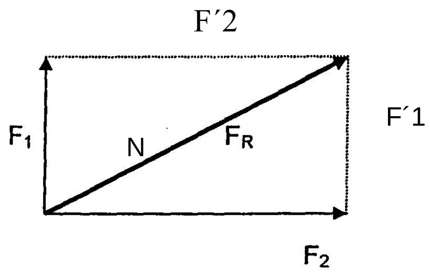
"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"



$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2}$$

<u>Ejemplo</u>:

Nos piden resolver un sistema de dos fuerzas concurrentes en un punto y no colineales, en donde el ángulo comprendido entre las fuerzas es de 90°, como se muestra la figura.



Para hallar la fuerza resultante ($\overrightarrow{FR}$) que nos pide el ejercicio, utilizaremos el teorema de Pitágoras. Observando la figura anterior, como primer paso, identificamos los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo "N".

Cateto mayor = $\overrightarrow{F2}$ = b.
Cateto menor = $\overrightarrow{F'1} = \overrightarrow{F1}$ = a
Hipotenusa = $\overrightarrow{FR}$ = c

Una vez identificado cada lado del triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el valor del módulo de $\overrightarrow{FR}$, de la siguiente forma:

$$\boxed{\overrightarrow{FR} = \sqrt{\overrightarrow{F1}^2 + \overrightarrow{F2}^2}}$$

Como último paso deberemos hallar la dirección de la fuerza resultante, o sea el ángulo de la misma, para ello veremos una pequeña introducción a las funciones trigonométricas, ya que nos serán necesarias para poder obtener este ángulo.

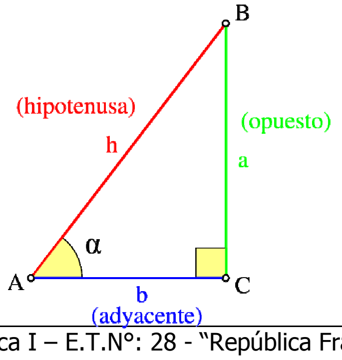
Funciones trigonométricas y razones trigonométricas

Las **funciones trigonométricas**, en matemáticas, son relaciones no angulares que se utilizan para relacionar los ángulos del triángulo (rectángulo) con las longitudes de los lados del mismo.
Las **razones trigonométricas** se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos.

Definiciones respecto de un triángulo rectángulo

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: α del vértice A, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en lo sucesivo será:

- La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo Rectángulo.
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.



1) El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.}$$

2) El **coseno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.}$$

3) La **tangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.}$$

Existen además otras funciones trigonométricas pero las mismas no son objeto de nuestro estudio. Para no recordar de memoria estas razones se utiliza la siguiente regla práctica:

Solo hay que recordar la palabra mágica: SOHCAHTOA. Separando en grupos de a tres letras nos queda:

SOH CAH TOA

Donde la primera letra de cada grupo de tres letras coincide con la función trigonométrica (Seno, Coseno, Tangente) y las demás son las iniciales de los catetos del triángulo rectángulo.
Entonces:

SOH=> $Sen\alpha = \dfrac{Opuesto}{Hipotenusa}$; **CAH=>** $Cos\alpha = \dfrac{Adyacente}{Hipotenusa}$; **TOA=>** $Tan\alpha = \dfrac{Opuesto}{Adyacente}$

Funciones trigonométricas inversas

En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones inversas se denominan con el prefijo arco, así:

Si $y = sen(x)$, se lee: **y es igual al seno de x**.

La función inversa es $x = arcsen(y)$, se lee: **x es el ángulo cuyo seno vale y, o el arco seno de y**.

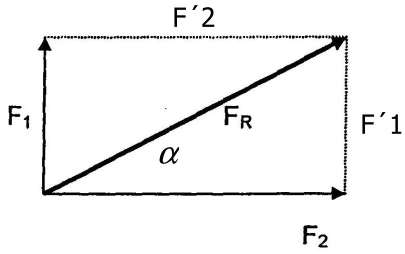
De la misma forma, la **función inversa del coseno será el arco coseno** y la de la **tangente el arco tangente**.

Habiendo presentado las funciones trigonométricas y sus inversas, ahora sí estamos en condiciones de resolver analíticamente la mayoría de los sistemas de fuerzas resueltos gráficamente.

Ejemplo de aplicación 3:

Resolver analíticamente el siguiente sistema de dos fuerzas concurrentes en un punto y no colineales, donde el ángulo comprendido entre las fuerzas es de 90°, sabiendo que:

$\overrightarrow{F1} = \overrightarrow{F'1} = 50\overrightarrow{kg}$
$\overrightarrow{F2} = \overrightarrow{F'2} = 100\overrightarrow{kg}$
$\overrightarrow{F1} \perp \overrightarrow{F2}$



Este ejercicio nos pide hallar analíticamente $\overrightarrow{FR}$ (fuerza resultante del sistema), la cual tendrá una intensidad y una dirección (recta de acción).

1) Como ya se planteo anteriormente, para obtener la intensidad (o módulo) de la fuerza resultante del sistema, utilizaremos el teorema de Pitágoras (ya que las fuerzas componentes del sistema forman un ángulo recto entre sí), entonces:

$$\overrightarrow{FR}^2 = \overrightarrow{F2}^2 + \overrightarrow{F'1}^2 \Rightarrow \overrightarrow{FR} = \sqrt{\overrightarrow{F2}^2 + \overrightarrow{F'1}^2} \Rightarrow \overrightarrow{FR} = \sqrt{(100\overrightarrow{kg})^2 + (50\overrightarrow{kg})^2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{FR} = \sqrt{10000\overrightarrow{Kg}^2 + 2500\overrightarrow{Kg}^2} \Rightarrow \overrightarrow{FR} = \sqrt{12500\overrightarrow{kg}^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{FR} = 111{,}8\overrightarrow{kg}}$$

2) Para hallar la dirección (ángulo α) de la fuerza resultante, recurriremos a las funciones trigonométricas. Utilizando el triángulo rectángulo formado por F2, F´1 y FR, debemos calcular el ángulo α que forman F2 y FR de la siguiente manera:

Los valores conocidos por nosotros son las intensidades de las fuerzas F2 y F´1, entonces sabiendo que <u>F2 es el cateto adyacente al ángulo α</u> y que <u>F´1 es el cateto opuesto al ángulo α</u>, debemos buscar la función trigonométrica que relacione a estos dos catetos. Recordando la palabra **SOHCAHTOA**, vemos que la función que relaciona estos catetos es la tangente, entonces planteamos:

$$Tg(\alpha) = \frac{Opuesto}{Adyacente} \Rightarrow Tg(\alpha) = \frac{\overrightarrow{F'1}}{\overrightarrow{F2}} \Rightarrow Tg(\alpha) = \frac{50\overrightarrow{kg}}{100\overrightarrow{kg}} \Rightarrow Tg(\alpha) = 0{,}5$$

Para hallar el ángulo utilizamos la función inversa de la tangente (arco tangente) de la siguiente forma:

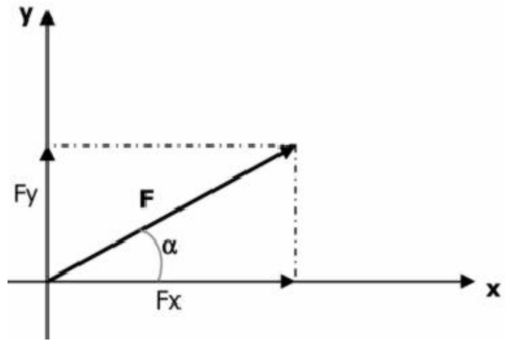
$$Tg(\alpha) = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = ArcTg(0{,}5)$$
$$\boxed{\alpha = 26°33'54''}$$

3) Como último paso expresamos el resultado como:

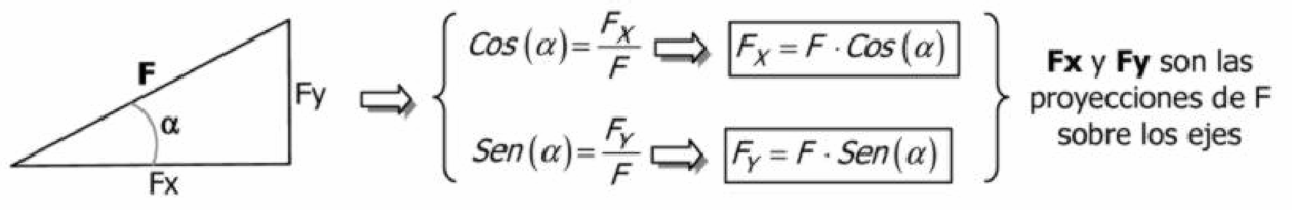
$$\overrightarrow{FR} = 111{,}8\overrightarrow{kg}$$
$$\alpha = 26°33'54''$$

Descomposición de fuerzas en los ejes cartesianos

Las fuerzas se pueden descomponer en dos direcciones dadas de antemano, para resolver analíticamente los sistemas de fuerzas concurrentes necesitamos descomponer las fuerzas en los ejes cartesianos. Descomponer una fuerza significa proyectarlas sobre las direcciones dadas.



En el siguiente gráfico se descompuso la fuerza $\vec{F}$ en los ejes x e y, obteniendo dos fuerzas sobre los mismos, $\vec{Fx}$ y $\vec{Fy}$, para hallar el valor numérico (o intensidad) de las mismas debemos recurrir a las funciones trigonométricas ya que los triángulos que se forman son rectángulos.



Ejemplo de aplicación 4:

Hallar las proyecciones o componentes de la fuerza $\vec{F} = 20\vec{kg}$, sabiendo que forma un ángulo de 30° con el eje "x".

1) Datos: **Incógnitas:**

$\vec{F} = 20\vec{kg}$	$\vec{Fx}$
$\alpha = 30°$	$\vec{Fy}$

2) Resolución:

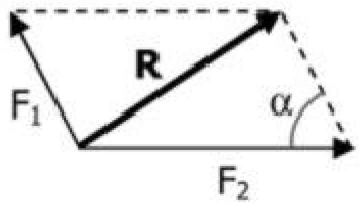
Utilizando las fórmulas antes vistas podemos hallar los valores de $\vec{Fx}$ y $\vec{Fy}$.

$$\vec{Fx} = \vec{F}.Cos(\alpha) \Rightarrow \vec{Fx} = 20\vec{kg}.Cos(30°) \Rightarrow \vec{Fx} = 20\vec{kg}.0{,}87 \Rightarrow \boxed{\vec{Fx} = 17{,}4\vec{kg}}$$

$$\vec{Fy} = \vec{F}.Sen(\alpha) \Rightarrow \vec{Fy} = 20\vec{kg}.Sen(30°) \Rightarrow \vec{Fy} = 20\vec{kg}.0{,}5 \Rightarrow \boxed{\vec{Fy} = 10\vec{kg}}$$

¿Cómo resolvemos un sistema conformado por dos fuerzas que forman entre sí un ángulo diferente a 90°?

Para resolver este tipo de sistemas se aplica el Teorema del Coseno como se muestra a continuación.



$$\boxed{R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot Cos(\alpha)}$$

Cálculo analítico cuando el sistema esta formado por más de dos fuerzas:

Para hallar la resultante se deben colocar los ejes cartesianos en el sistema, haciendo coincidir una de las fuerzas del sistema con alguno de los semiejes. Luego se descomponen todas las fuerzas en dichos ejes (x e y).

Si el sistema estuviera formado por tres fuerzas $\overrightarrow{F1}$, $\overrightarrow{F2}$ y $\overrightarrow{F3}$, descomponiendo las mismas en los ejes x e y, obtendremos, F1x, F2x, F3x y F1y, F2y, F3y.

Luego se deberá formar una ecuación correspondiente a las proyecciones sobre el eje x y otra ecuación correspondiente a las proyecciones sobre el eje y, en estas ecuaciones se deberán tener en cuenta el signo de las diferentes proyecciones, para luego se sumarlas obtener una resultante de las proyecciones en el eje x ($\overrightarrow{FRx}$) y otra en el eje y ($\overrightarrow{FRy}$).

$$\boxed{\overrightarrow{FRx} = \overrightarrow{F1x} + \overrightarrow{F2x} + \overrightarrow{F3x}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{FRy} = \overrightarrow{F1y} + \overrightarrow{F2y} + \overrightarrow{F3y}}$$

Una vez obtenidas las fuerzas resultantes proyectadas $\overrightarrow{FRx}$ y $\overrightarrow{FRy}$, aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos el valor de la fuerza resultante ($\overrightarrow{FR}$).

$$\boxed{\overrightarrow{FR} = \sqrt{\overrightarrow{FRx}^2 + \overrightarrow{FRy}^2}}$$

Webs de interés y consulta:

- http://www.walter-fendt.de/ph14s/equilibrium_s.htm
- http://www.walter-fendt.de/ph14s/resultant_s.htm
- http://www.walter-fendt.de/ph14s/forceresol_s.htm

"No puedes elegir el modo de perder, pero sí puedes elegir como recuperarte para ganar la próxima vez"